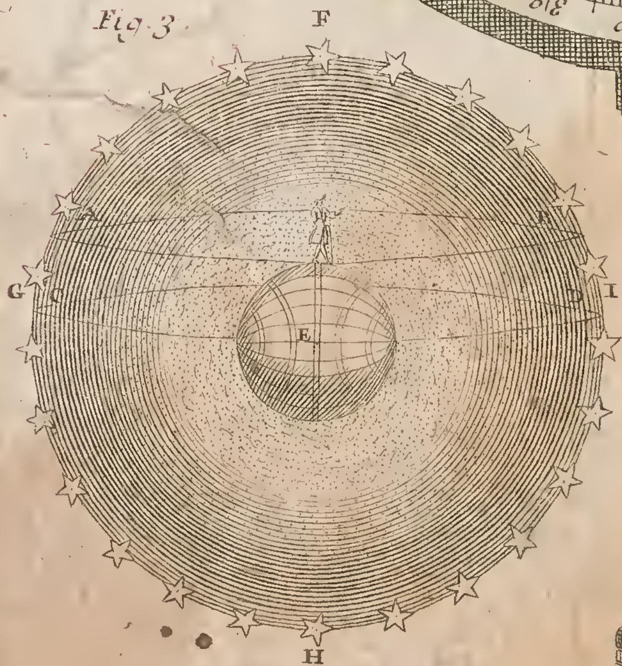


Fig. 1

Z
Æ
Pol. Arct.
Cir. Hor.
C
D
T
ARIES
TAURUS
Pol. Antarct.

Fig. 3



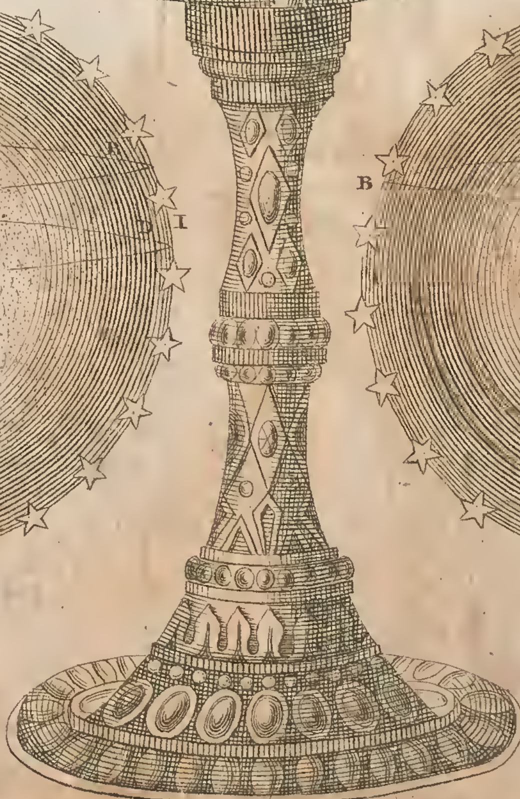
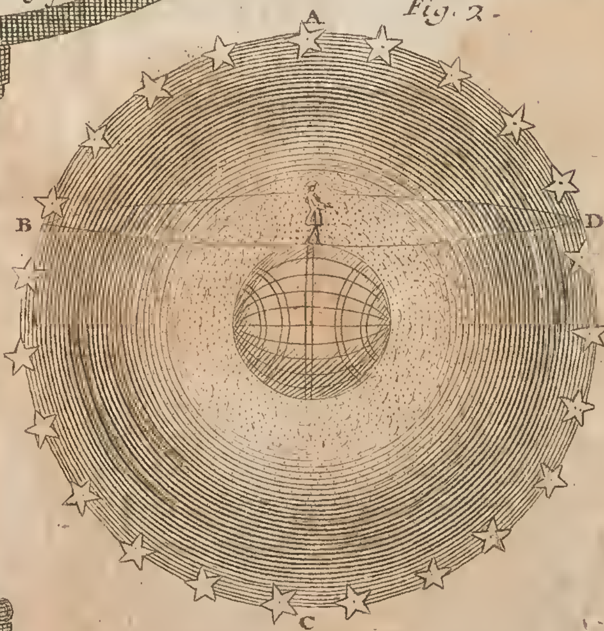


Fig. 2.



A4

36
£3/5/-

Physica

Tradita a Rev.do Domino
Antonio Marty,

Licentiato Theologo, Socio
Sorbonico, Philosophiæq;
Professore
in Collegio Sorbono-Plessæo
Parisiis:
Accepta verò ab Auditore ejus
D. J. Turner
Anglo-Benedictino:
Incæpta initio mensis Oct:
A: 1787.

Naturam, legesq; suas Nox atra tegebat:
Sit Newtonus, ait Deus, & lux cuncta fuerunt.

Physicæ

Caput alterum.

De

Corporum naturis ac legibus.

Illud demùm à nobis & instituti & temporis ratio postulat, ut à spirituum tractatu ad corporum naturas, legesq investigandas animum & operam transferamus. Et hoc qdm Philosophiæ pars tam latè patet, ut qidqid corporeum est, sibi quodammodo vindicet. Porrò cùm oia qbs abditè naturalium phenomenorum causæ continentur, seu qæ experimentis, seu qæ ratione innotescunt brevi tractatu comprehendere & complecti nequeamus, eam partem, qæ ad experimenta spectat, prætermittemus, legesq solummodò ex qbs oriuntur phenomena præcipua, exploramus. Quippe nihil aliud nostri muneris & officii est, qùam ut hujus scientiæ exponamus elementa. Quod duplici Sectione

exequi conabimur. In priori de corporibus solitariè sumptis disputationem instituemus, quâ declarentur illæ proprietates, quæ ad genus ipsum materiæ pertinent: In alterâ agemus de motuum legibus, quibus corpora veluti quadam societate inter se colligantur atque reguntur.

Sectio 1.a

De Corporibus solitariè sumptis, hoc est: De generalibus materiæ proprietatibus.

Corpora hic sine motu considerantur; continetque ista Sectio generales corporum notiones, quæ legibus eorumdem exquirendis praeviæ esse debent.

De Corporum definitione.

Esse corpora jamdudum effecimus; sed ista præcipuè difficilis & obscura quæstio est, Quod sit, qualisve materia. Qua in re ut in incertis rebus omnibus fieri solet, multum discrepant Philosophorum opiniones.

Corporis naturam Carthesiani in

extensione actuali, ut ipsi loquuntur,
repositam volunt; qæ vulgò definitur Positio
partium extra partes. Porro cum istarum
partium, qæ poni extra se verè dicuntur,
natura penitus ignoretur, idcirco nec
perspicua est, nec sufficit Carthesiana
deffinitio.

Peripatetici fuere, qui in extensione
ut aiebant, radicali materiæ naturam
constitutam vellent. Sed hæc radicalis
extensio, qàm actualis ° facilius intelli=
=gitur. Quapropter Peripateticos hâc in re
ut plerumq in aliis, magistros recusamus.

Nec placet Gassendii definitio,
juxta qam corporis natura in eo consis=
=tit, ut penetrari nullo modo possit, hoc est,
ut duo corpora uno eodemq loco simul
consistere nequeant. Tribui enim hanc
proprietatem corporibus volumus; qod per se
liquet duas materiæ partes ° posse ita coales=
=cere, ut ° nisi unam efficiant; verum
superest inquirendum qualis sit natura
earum rerum quæ in sese invicem ingredi
& penetrare nequeunt. Atq hoc qdm cor=
=poribus convenire demonstratur, etiam
ignoratâ eorum naturâ.

Alii dicunt corpus substantiam esse
inertem et otiosam. Verum est hoc proprietas
mera negatio potestatis. Ac proptereà °

Demonstratur corporibus ita pp[ro]pria, ut n[on] aliis etiam rebus conveniat; imò nihil est in orbe effecto q[u]od movere se virtute suâ possit, sed una est o[mn]ium q[uae] fiunt causa efficiens, nempè Deus.

Concludamus intimam materiæ naturam esse ex iis rebus, in quarum penitus ignoratione versamur; q[u]â de re nobiscum maximi viri consentiunt. "Videmus, inquit Newtonus (prin: mat: lib. 3º) corporum "figuras, audimus sonus, tangimus super= "=ficies, intimas autem substantias nullo "sensu, nullâ cogitatione reflexâ cognos= "=cimus."

De

Materiæ partium similitudine.

Quæri rursùm solet an sit materia homogenea; hoc est, an constet ex elementis o[mn]i[n]o inter sese similibus.

Verum ne ad id q[ui]dem facilis responsio est. Quî enim incognitarum rerum simili= =tudo aut affirmari queat aut negari? hoc unum statuimus: ex corporum infinitâ varietate argumentum duci n[on] posse ma= =teriam n[on] esse homogeneam: Nam ex ele= =mentis consimilibus diversa concipimus corpora posse efformari, pp[ro]tereà q[u]od in=

=numerabilibus modis conjungi elementa & coagmentari possunt, vacuisque spatiolis inter se relictis, in varias ultra quam dici potest, figuras magnitudinesque excrescere.

Et quidem quotidie observamus corpora mutari, & prope infinitas lapsu temporum formas induere, quamvis certe primigeniis ex quibus conflantur, elementis nihil mutationis accidat. Sic, ut uno utar exemplo, ex granis singulis, quae terrae mandantur, stirpes subinde exurgunt & efflorescunt, multiplicatis onustae granis; ex quibus saepe in pulverem redactis, deinde in unam massam compactis panis existit; hic autem in corpore nostro humor fit & sanguis, tum demum caro & ossa. Porro tam fieri posse intelligitur, ut ex certis materiae partibus prout opus est dis=positis, lapides, ligna, metalla conflen=tur, quam ut caro & ossa ex materia tri=tici.

Utrum materia dividi in infinitum possit.

Nunc an & quousque eximiae corporum partes scindi atque discerpi queant, venit explorandum. Corpora autem singula, in quibus experimenta tentare licet, in partes minutissimas

innumerabilesq. posse resolvi, neminem nisi planè in Physicis rudem & inexpertum latet. Imò ostensuri sumus materiam ultra oem excogitandi vim compositam esse ac divisionis patientem.

At verò solet altera questio agitari, & hanc qdm metaphysicam totias qdm Physicam jure dixeris: Num viz materia sit suapte naturâ perpetuò & sine fine composita, ut ne infinita qdm vis eam valeat ad partes minimè extensas & simplices redigere? num verò eadem constet ex elementis oiò unis atq simplicibus?

Porrò circa hanc alteram questionem triplex opinio est. Primum Carthesiani post multa Aristotelis dogmata rejecta, hoc tn ex illo retinuêre, ut corpus qodlibet naturâ suâ ex partibus numero infinitis concretum esse pronuntiarent, ita uti ex ~~[illegible]~~ haurири nunqam dividendo posset materiâ, nec quantulacunq materiæ particula. 2do Opinionem elementorum simplicium invenerat Zeno, cui neminem in tota antiqitate parem subtilitate fuisse ferunt; hanc autem ipsâ ætate Carthesii nonnulli secuti sunt, eamq postmodum multiplici argumento firmavit ac veluti suam fecit Leibnitzius.

Tertia opinio eorum est, qui inter utramq partem hærent suspensi, illud unum affirmantes, quæstionem de materia elementis, an sint simplicia, an verò in infinitum divisioni obnoxia, problema esse hactenùs minimè solutum.

Conclusio 1.a

Materia ultra oem excogitandi vim potest dividi.

Probatur. Inter innumera experimenta quæ hanc in rem tentata fuêre, pauca seligemus, quæ ad id, quod volumus conficiendum aptissima videntur.

Experimentum 1.m

Assumatur candela ex sebo facta, cujus pondus sit duarum unciarum. Cognitum experimento est eam noctu accensam ad Leucæ unius distantiam, & sæpè majorem conspici. Ex eo autem argumentantur plerique, ii præsertim qui Newtono in explicandâ luminis naturâ assentiuntur, materiam posse incredibiliter dividi. Constat enim Leuca vulgaris tribus millibus passuum geometricorum, ideoq pedibus solitis 15000, pollicibus 180000. Sed pollex materiæ etiam opacæ partes 200 continet ipsis oculis conspi=

=cuas. Ergo Leuca vulgaris partes habet con=
=spicuas 36,000,000; radius itaq sphero lucido
qam efficiunt particulo e candela in orbem
emisso, est 36,000,000 partium qo videntur,
diameter proinde = 72,000,000; est autem
peripheria circuli, diametri ad minimum
tripla; peripheria igitur = 216,000,000, quâ
in diametrum ducta, prodit sphero superfi=
=cies = 15,552,000,000,000,000; qo iterum si
ducatur in trientem radii erit totius sphero
soliditas = 186,624,000,000,000,000,000,000.
Itaq e candela duarum unciarum per unum-
quodq minutum secundum totidem partes
emittuntur oculis conspicuo: Atqui tn per
hoc brevissimum tempus, cum minima est
ac ferè nulla imminutio candelo; Ergo &c.

Newtoniano igitur nemini incredibile
videri debet, qod a Nieuwentit lib: 2°. De
Exist: Dei, Cap: 2°. est affirmatum: "Il sort
„d'une chandelle alumée dans une seule
„seconde mille fois mille millions plus
„de parties de lumiere que la terre ne
„contient de grains de sable."

Experimentum 2.^{dum}

Notum est oibus massam argenti cylin=
=dricam 22 pollices longam, diametrum ha=
=bentem 15 linearum, pondus verò librarum 22 $\frac{1}{2}$,

vestitam foliis aureis pondere 6 unciarum, indus=
=triâ eorum qui aurum in stamina ducunt, gallicè
Tireurs d'or extendi & propagari ad longitudinem
13,963,240 pollicum, qui 97 leucas constituunt;
atq etiam longius protendi posset filum, nisi per
nimiam tenuitatem ad destinatum usum inu=
=tile evaderet; destinatur nempe ad filum
sericum obtegendum. Qapptr, ut major fiat
ejus superficies, contunditur atq ex rotundo
redigitur in planum; crescit hoc pacto fili
longitudo ad centum leucas usq & amplius,
superficies verò fit duplo major; unde potest
dividi in duas lamellas, atq fila bis centum
Leucas efficere. Proterea utraq lamella
aliqam retinet profunditatem, ut dividi rur=
=sum utraq in duas possit, & sic totius fili
longitudo 400 Leucas superare. Ergo sex uncia
auri cilyndrum argenteum cingentes ultra
Leucas 400 extendi possunt. Nunc autem
si qis inqisierit qot fili aurei particulæ
nudis conspicuæ oculis in tanta longitudine
contineantur (qæ computatio facilis est, qdo=
=qdm scimus contineri in uno pollice partes
saltem 200, qæ distinctè oculos feriant) is
inquam, intelliget qam stupendæ divisionis
materia sit capax.

Feb: 12th. 1788.

Experimentum 3^m.

Ex tenuissimâ ampullâ plenâ spiritus vini cui odor ex lavandula accesserit, igne supposito intra cubiculum 20 pedes longum, latum 12, altumque item 12, vapor exhalatur odorem spar=gens in oīa cubiculi puncta: Atqi tn liquor ampullæ eodem tempore vix deperditâ qan=titate minuitur; præterea partes ex liquore avolantes ō oēs sunt odoriferæ. Qantitas igitur liqoris ultra modum exigua in totidem fere partes dividitur, qot spatii puncta insunt in prædicto cubiculo, cujus capacitas fa=cili computatione æstimari potest: Ergo &c.

Ex grano etiam moski per 20 annos in cubiculo aperto importunus odor emittitur, qamvis elapso hoc tempore illius moles nihil imminuta videatur. — —

Cætera omittimus experimenta, quæ in variis auctoribus ab oibus legi possunt, nominatim apud Needham Observ: mycrosp: & in vulgatissimis lectionibus Nollet. &c —

Conclusio 2^a.

Simplicia oiò sunt materiæ elementa.

Prob: Vel enim ita est, vel in singulis corporibus insunt partes numero infinito, sic ut nunqam deveniri ad ultimam possit, imo vero ultima nulla sit; Atqi istud plane repugnat; primum quia numerus quilibet constat ex unitatibus simul junctis & compositis; si nulla igitur foret in materiâ unitas simplex & ultima, nullus qod in materiâ numerus partium esset. Deinde absurdum est numerum infinitum partium esse finitum & penitus exhaustum; Atqi tn ita esset, si corpora singula forent perpetuò composita, nec constarent ex ullis primis elementis: imo qoniam in plures partes finitas idem corpus dividi potest, haberemus in uno eodemq corpore infinitum multoties exhaustum, qod sane multipliciter absurdum e immeritò diximus.

Nec verò notio ulla materiæ distincta afferri posset. Quid enim esset, qoso, materia? Extensio, inquiunt, seu positio partium extra partes. Verum positio ista an esset partium simplicium an extensarum? Si prius dixerint, hoc ipsum est qod volumus: sin alterum, recurrit nostra interrogatio ——

Negari itaq e posse videtur materiam constare ex elementis simplicibus. Fatentur sane oes materiam esse aggregatum qoddam; sed si tollantur elementa simplicia, nihil aliud in materiâ reperies præter aggregatum aggregatorum; hoc est, erit qdm

collectio & coagmentatio, sed nullum erit tn collectionis istius vel coagmentationis princi=
=pium, quod perindè est, ac si ingentem exer=
=citum sine militibus conflare velles.

Obj: 1º. Ex elementis simplicibus con=
=flari ō possunt corpora verè extensa:
Zero qippè extensionis nunqdm poterit ex=
=tensionem efficere. Ergo &c.

Respondebat Guido grandi mathemati=
=cus magni Etruriæ Ducis. (De quadraturâ circuli & hyperbolæ) partes qdm simplices si numero finito essent, ō posse extensio=
=nem generare; at si numero essent infinito, posse; qod confirmare nitebatur exemplo fractionis $\frac{1}{2}$ in seriem infinitam reductæ juxta methodum, quâ anteâ usi sumus in Mathesi. Nempe, inquiebat ille $1-1+1-1\ldots = \frac{1}{2}$. Ergo $0+0+0\ldots\ldots = \frac{1}{2}$: Porrò sicut po=
=test ex zero infinities sumpto aliqd verum exurgere, ita ex elementis minime exten=
=sis, at infinitis numero potest vera gigni extensio.

Nos verò talem responsionem ne jocandi qdm causâ nobis accommodare

possumus quippe, cum minimè fateamur numerum materiæ elementorum esse infi=
=nitum.

Duo itaque solummodò respondemus:

1°. non facilius intelligi in adversario=
=rum sententiâ qomodo efficiatur, aut è qbs proficiscatur initiis materiæ compositio, qemadmodum nec dici nec cogitari potest, qbs auxiliis vel unde appensa sustineretur catena, cujus extremum teneremus annulum, sed qæ sursum infinitè protensa careret annulo oium primo.

2do. negamus utrumq argumenti princi=
=pium: compositio enim sive extensio, nihil aliud est qam partium conjunctarum dis=
=tinctio & numerus: atqi positis punctis omni extensione carentibus, facilè intel=
=ligitur distinctarum partium, multarumq conjunctio. Sunt enim singulæ substantiæ ejusdem generis, quarum nulla est, quæ alterius consortium, viciniumq excludat. Se habent proterêa elementa materiæ erga extensionem efficiendam, velut unitates ad numerum, aut milites ad exercitum, & generatim ut res singulæ componentes ad collectionem rerum, ex qbs totum componitur.

Atqui sane ex eo quod unitas est zero numeri, miles zero exercitus, res qolibet singularis zero item compositionis, concludere nemo potest multas unitates ō esse aptas ad numerum efficiendum, nec plures milites ad compo=nendum exercitum, &c. Ergo similiter &c.

Inst: 1.º Puncta simplicia se tangunt secundum se tota: Ergo sibi invicem addita unico puncto simplici ~~potent~~ ō latius patent, neq proinde extensionem afferunt.

Resp: hujus argumentaonis vitium in eo esse, ut materiæ extensionem inducat tanqam aliqid continuum; sed ea, ut diximus, nihil aliud potest esse qam aggregatio par=tium, inter qas minima sit ratio distantiæ: hoc autem ō adeò parva esse potest, ut par=tes oes in unam prorsùs eamdemq coales=cant. Cum enim distantia partium mutua ferè idem sonet ac earumdem distinctio, absurdum est & secum pugnans, ut plura puncta simplicia se tangant secundum se tota; nam hæc se tangunt qdm, alioqin ō essent plura.

Collecta igitur puncta vere latius pa=tent unico puncto simplici; latius enim patere, in partibus corporis nihil aliud est, qàm majori esse ~~n~~ numero & magis inter se distingui raone distantiæ; atqi plura puncta etsi ō extensa, majori sunt numero qàm punctum unum, magisq &c. Ergo &c.

Neque enim ad conflandam extensio=
=nem qualis cernitur, necesse est ut partes
corporum primariæ sese contingant; sed
satis est omninò si propè se exiguis
intervallis ponantur. Atque illud est cum
experientiâ maximè consentaneum. Vide=
=mus enim durissimorum corporum partes
vacua inter se spatia relinquere. Nam
quid est v: g: Adamante solidius? Atqui
tamen illud luminis radii permeant. Sit
quoque Agathen; subeunt varii liquores, quo=
=rum ope diversis ad arbitrium colori=
=bus imbuitur. Auri etiam validissimè
compacti meatus nullo labore subit
ea, quæ dicitur aqua regalis, & quidem
tantâ cum vi, ut aurum continuò dissol=
=vat. Cum igitur Monades, ex quibus
singula constant corpora, intervallis dis=
=clusas esse fingimus, tum nihil indu=
=cimus, quod a corporum naturis alienum
esse videatur.

Inst: 2do. Si partes corporum o sese
tangunt, periculum profectò est, ne dissipentur.

Nego Ant: Nam quemadmodum necessaria foret causa quædam omnipotens, quâ partes sibi mutuò adhærentes perpetuò in contac=tu retinerentur, imò ut primùm in con=tactu ipso ponerentur; ita prorsùs requi=ritur eadem causa, ut in propinquitate teneantur, atque ut singulorum figantur intervallorum limites. Porrò talis causa non deest; proinde verendum non est ne in tenues auras Corpora dissipentur: Ergo &c.

Obj: 2.do Nonnulla ex principiis geometricis deducta scilicet 1.° Diago=nalis quadrati & latus nullam commu=nem habent mensuram; Atqi tamen ha=berent, positis Monadibus: Siquidem Dia=gonalis in eâ hypothesi latus necessa=riò superaret certo quodam ac definito punctorum simplicium numero. 2.do Si admitterentur puncta simplicia, æquales essent duæ circumferentiæ circa unicum centrum delineatæ; possunt enim è centro

ad majorem circumferentiam duci totidem radii, quot puncta in illâ continentur; qui quidem necessariò interiorem circumferentiam secant; Atqui istud fieri non potest, nisi in hâc quam in illâ non minor insit punctorum numerus. 3º Triangulus fin=gatur isoceles, cujus basis quinque (exempli gratiâ,) habeat puncta, la=tera verò decem habeant; nunc lineæ ducantur basi parallelæ. Dum istæ ad apicem ascendunt, duobus punctis singulæ minores fiunt. Ergo tertia a basi linea erit puncto inextenso minor.

4º Angulus quem efficit curva qolibet cum tangente est infinitè parvus; et tamen in alios numero infinitos per curvas inter tangentem & primam cur=vam transeuntes dividitur.

Quid plura? nonne infinita demon=strantur spatia hyperbolam inter et asymptotos comprehensam? Ergo &c.

Ad hoc atque his similia respondere solent alii alio modo. Sed plerique in hoc nostro quidem judicio tempus terunt ina=
=niter; non quod difficilia solutu sint ea quæ objecta sunt, verum quod multi non advertunt illa penitus à scopo aberrare. Scilicet proposita hactenus argumenta id solum efficiunt, posse in partes in=
=finitas dividi spatium, quod ultro ad=
=modum confitemur, hanc quippe natu=
=ram esse omnis continui pro certo ratoq habemus. Sed quantum natura spatii à materiâ discrepet, nemo prudens o intelligit. Materiam enim esse discre=
=tam nemo ignorat, proinde illius ex=
=tensio longè differt a geometricâ spa=
=tii extensione. Perperam itaq in argu=
=mentis modo adductis hoc cum illâ confunditur. Atq ista responsio pariter omnibus accommodari potest; neq enim vacat singula persequi.

Obj: 3º Elementa materiæ ō possunt cogitare: Atqui n̄ possent, nisi essent composita: Ergo &c.

Resp: 1.º Cum omni ratione demonstratum habeamus naturam humanæ mentis ab omni materiâ, elementisve materiæ esse secretam; si hanc sententiam in minimum discrimen adduceret punctorum simplicium hypothesis ultro à nobis hypothesim istam, celeriterq esse deserendam.

Resp: 2.do Id minime timendum esse: si enim sequeretur materiæ elementa co=gitare posse ex eo quod simplicia sunt, valeret ista argumentandi ratio: talis substantia est simplex; Ergo potest cogitare; Atqui hæc conclusio ō valet. Nam simpli=citas nihil aliud est quam existentia unica & singularis. Jam vero absurdum foret dicere omnem existentiam unicam & singularem, vim cogitandi includere.

Verbo dicam, ut aliqua res cogitationis suscipiendæ capax habeatur haud quaquam satis est eam esse simplicem. Requiritur præterea ejusmodi esse illius attributa, ut cogitationem patiantur. Quod si inertem atq otiosam materiæ naturam ipsa etiam elementa servent, jure ac merito nega=bitur cogitandi vim in iis inhærere posse. Atqui ō ideo quod simplicia sunt, materiæ

indolem, naturamve amittunt; non ideo aliquam sive motum, figuram, statumve tribuendi virtutem accipiunt. Nam si quid potestatis haberent sejuncta, cur idem etiam aggre=gata non retinerent, equidem minime video.

Hactenus de corporum elementis, nunc de corporum formis disputationem instituere supervacaneum arbitramur esse. Id unum observasse satis erit ex solis motuum legibus ab Auctore Naturae constitutis oriri innumerabiles corporum formas, quod satis experientia declaratur. Omissis itaque Peripateticorum formis substanti=alibus, itemque Leibnitzii Monadibus ac=tivis, neglectis etiam naturis plasticis Cudworthii, tandemque Nicolai Hartsoekeri intelligentia rectrice; quae quidem omnia, ut fatendum est, haud facile intelliguntur, paulo meliora investigemus.

De Corporum raritate.

Inest in corporibus singulis raritas quaedam assimilis spongiis, id est, nulla occurrunt corpora, quorum inter partes non multa admisceantur vacua intervalla, quae pori vulgo nuncupantur.

Partimq ex eo nascitur infinita illa cor=
=porum varietas, formarum & figurarum
Discrepantia. Hoc utrumq evolvi pau=
=lulùm & explicari indiget.

1.° qdm materia partibus plurima
interseri spatia multiplici confirmatur
argumento.

Causam id affirmandi & principiò
afferunt corpora oia perlucida, qꝗ nisi
rectis ac propè infinitis paterent fora=
=minibus, profectò o translucerent.

Illud confirmant varii liquores, qui
corpora durissima permeant. Qd dicam
de igne fluidorum mobilissimo ac te=
=nuissimo? undè illi, qoso, tanta vis urendi
ac traditam sibi materiam qamlibet
aut continuò fundendi, aut in pulverem
redigendi? Nonne ad id requiritur, ut in
corporum meatus ac venas insinuet sese?
corpora igitur patent meatibus. Quid quod
permixta sopè fluida diversi generis & con=
=fusa angustiorem qàm antè singula locum
occupant, cujusmodi sunt aqua & spiritus
vini; hunc enim illa penitùs absurbit &
vorat. Verùm unico ad rem conficiendam
uti experimento satis est, ope viz. micros=
=copii in omni corporum genere obser=
=vantur qotidie cavitates, sinus, multi=
=plicesq defectus.

Et verò si continuò plena alq

perfecta essent corpora, eqales essent moles oes sub eodem volumine comprehensa, eqalia oium pondera, eadem vis adhibenda esset ad qolibet corpora ejusdem voluminis locos dimovenda. Est enim corporum pondus aut movendorum difficultas; ex numero partium estimanda; Atqi si nihil in illis esset vacuum, idem prorsus partium numerus definito volumine contineretur: Ergo idem qod ad corpora pellenda conatus reqireretur; qod falsum esse ignorat nemo.

Nunc vero o satis demonstrasse in corporibus meatus esse qàm plurimos; nam proterea sciendum est longe plura in illis vacua esse spatia qàm repleta. Qod qdm, si admittantur elementa simplicia o sese invicem proxime tangentia, ois evidens est. Ut autem illud clarius pateat, sumatur globus vitreus, cujus diameter sit unius pedis, seu linearum 144. Erit ergo periphoeria globi totius juxta rationem Archimedis = 432: superficies autem convexa 62208 linearum, cujus dimidia pars, hoc est, unius hemisphærii superficies erit 31104. Ergo hemisphærium illud terminari poterit 31104 latusculis. Jam vero trans unumqodq latusculum in=

=spiceantur vicina objecta hemispherio nimirùm vitreo oculum inter & illa in=terposito. Nullum erit latusculum per quod non transmittantur luminis radii ad oculum. Undè sic licet argumentari: cum transpectum probeant singula latuscula, cùmque satis clarum & nitidum, oportet singulis correspondere in globo vitreo totque saltem meatus rectà porrectos, quot partes materiæ solidæ; Atqui sunt latuscula 31104; Ergo meatus globi vi=trei juxta lineam rectam porrecti, to=tumque globum trajicientes existunt 31104 vicibus plures, quàm partes vitri solidæ. Quantus vero cresceret meatuum numerus, si globus ille in tenues lamellas divi=deretur; meritò itaque possumus affirmare majorem esse materiæ in vitro contentæ rationem, ad vitri volumen, quàm arenulæ ad universam terræ molem.

2°. Ut intelligatur quanta corporum varietas & vacuorum admixtione nasca=tur, observandum est plures distingui posse elementorum ordines. Nempe coadu=nari possunt primum elementa simplicia, majori minorive numero, in illam aut hanc figuram. Fingamus E.G: tria puncta in triangulum conjuncta; talium elemento=rum ordo primus poterit appellari. Tum addantur sibi mutuo plura ejusmodi triangula

solida, ita ut congregata tm spatii vacui inter se relinquent qantum ipsa occupant. Talia corpuscula secundum efficiunt elementorum ordinem. Qod si iterùm istoc coadunentur numero eodem, similiq condition, ut nempe qantum spatii replent, tantumdem vacui re=linquent. Hic erit 3.us elementorum ordo.

Nunc sit corpus quoddam confla=tum ex ordinibus sex elementorum, qalia modò descripsimus; & proterea suppo=natur in 1.° ordine nihil esse vacui. Facilè computabitur, qo sit in illo cor=pore spatii vacui ad plenum ratio. Ultimus viz. elementorum ordo continet spatium vacuum aqale spatio pleno; est ergo plenum $=\frac{1}{2}$. Verum istud o est perfectè plenum; occu=patur enim alio elementorum ordine, cujus eadem ac prioris natura est; igitur hic alius ordo mediâ sui parte vacuus est, ac plenum qod continet $=\frac{1}{4}$. Idem de subse=genti ordine dicendum, & sic deinceps usq ad primum, qui constat ex elementis sim=plicibus, qiq ex integro solidus esse fin=gitur, qamvis reipsa o sit. Qapptr totius corporis soliditas, seu qantitas materia in eo contenta erit $=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$. Ergo spatii pleni ad vacuum ratio est ut 1:63.

Jam verò si diversi supponantur ordines elementorum, ex qbs unumqodq corpus efficitur, diversi, inqam, tum numero, tum formâ & figurâ elementorum simplicium, qæ insunt in singulis ordinibus hinc infinita propemodum existere poterit compositionum varietas. —

De
Densitate & Volumine.

Corporis densitas æstimanda est ex numero partium sub dato spatio comprehensarum. Ex hac definitione seqitur 1.° corpus esse eò densius, qo ejus partes propius ad se invicem accedunt; nam tum plures in dato spatio continentur: 2.do majorem esse corporis densioris qam rarioris molem. —

Moles enim est partium numerus absolutus, hoc est, ō considerata spatii qod occupant, qantitate. —

Volumen autem est ipsum spatium, qod partes corporis occupant, simul cum iis intervallis, qbs eædem partes interrupto a se invicem separantur. Ex qo seqitur mutari volumen posse eâdem remanente mole, coarctatis viz. poris, seu auctâ

densitate. ~~

Porrò super volumine & densitate duo hic exequemur: 1º Exponemus nulla Kellii theoremata de contractione & dilatatione materiæ: 2do varias perquiremus densitatis, molis, voluminisq rationes. ~~

Theorema 1um: ~

Particula quælibet materiæ quantumvis exigua, in sphæram concavam conflari potest, cujus diameter quamcunq lineam datam superest. ~~

Demonstr. Sit data materiæ particula $= a^3$: linea in radium proposita $= b$: radius concavitatis $= x$. Erit crassitudo pelliculæ concavitatem sphæricam ambientis $= b - x$: sit ratio peripheriæ ad radium $= \frac{c}{r}$: iis

Quibus positis, in promptu est illa proportio $r : c :: b : \frac{bc}{r}$. Peripheria igitur circuli majoris sphæræ totius $= \frac{bc}{r}$. Sphæræ autem superficies æquat peripheriam ductam in diametrum. Ergo superficies sphæræ, cujus radius est b, erit $= \frac{2b^2c}{r}$. Jam verò ista superficies ducta in trientem radii continuò exhibebit sphæræ totius capacitatem $= \frac{2b^3c}{3r}$; pariter concavitas sphærica, cujus radius est x,

erit $= \frac{2x^3 c}{3r}$. Ergo differentia sphoræ totius & concavitatis sphoricæ $= \frac{2b^3c - 2x^3c}{3r}$. Verum hæc differentia est ipsa lamella sphorica, quæ ex data particula a^3 effi=ciendo erat; Ergo $a^3 = \frac{2b^3c - 2x^3c}{3r}$. Ex quo deducitur $x^3 = b^3 - \frac{3a^3r}{2c}$, ac consequenter $x = \sqrt[3]{b^3 - \frac{3ra^3}{2c}}$. Sed crassitudo lamellæ sphoricæ, quæ ex a^3 componenda & efformanda proponitur $= b - x$; est igitur eadem $= b - \sqrt[3]{b^3 - \frac{3ra^3}{3c}}$. Atqui ista quantitas o est omnino nulla, ut patet. Ergo &c.

Brevior esset ac expeditior demonstratio, si sphorarum loco cubi supponerentur. Tunc enim, una dimentione cubi majoris b appellata, x dimensione cubi interioris & concavi, statim haberetur $b^3 - x^3 = a^3$, unde $x = \sqrt[3]{b^3 - a^3}$; Ergo $b - x = b - \sqrt[3]{b^3 - a^3}$. Cum igitur sit $b > \sqrt[3]{b^3 - a^3}$, sequitur $b - x$ aliquid valere, ideoque &c.

Theorema 2^{dum}.

Materiæ particula quantumlibet parva spatium quantumcumque ita replere potest, ut nullum in eo vacuum relinquatur, cujus diameter quantulacumque lineolam su=perat.

Demonstr. Sit data materiæ particula $=a^3$: lineola vacui spatii qam minimi diametrum exhibens sit $=k$: latus demum cubi designati sit B, C.

Jam dividatur B, C in partes, qarum singula sint $=k$; sitq eorum numerus $=n$. Numerus ille infinitus esse ø potest, qdoqdm nec latus BC infinitum nec lineola k infinite parva supponitur. Jam vero $BC=nk$; igitur $\overline{BC}^3=n^3k^3$; Ergo $n^3=\frac{\overline{BC}^3}{k^3}$. Cujus qdm fractionis Numerator indicat in cubo designato, qot sint spatiola cubica $=k^3$, qot sunt $=$ A, D, E, &c.

Nunc autem arenula a^3 divisa in tot partes, qot continentur unitates in fractione $\frac{\overline{BC}^3}{k^3}$ distribuatur singulis spatiolis. Unaqq pars in iis inclusa in sphæram cavam efformari potest sua inscriptam cellula, ut in theoremate 1° ostensum e. Ergo erunt totidem sphæræ concavæ in toto cubo inclusæ, qot sunt in eodem spatiola cubica; Atqi sphærarum illorum diametri, seu pori toto in cubo disseminati ø superant datam lineolam k, ut manifestum est: Ergo &c.



Duo ex demonstratis, si modò hoc velut accurata accipiuntur, consectaria deduci possunt.

Primum.

Corpus qodcumq, si confingatur, potest redigi ad volumen, qod sit prioris voluminis pars qantum placuerit exigua. Materia corporis compacti ex Theorem. 1.º in volumen centies, millies q &c suâ extensione majus expandi & explicari potest; verum quâ ratione intelligitur amplificari posse & prope in infinitum extendi alicujus corporis volumen, eadem qod perspicitur posse istud contrahi, & redigi ad partem, qæ sit prioris voluminis $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100000}$, &c.

Secundum.

Hinc concipitur corpus humanum, absq mutatâ membrorum formâ & proportione, condensari posse, & in angustum bis spatium comprimi & coarctari. Atq inde solvitur id qod novatores objiciunt, adversus Catholicæ Ecclesiæ dogma docentis Xti corpus sub qâvis hostiæ consecratæ particulâ, modò sit hoc conspicua oculis, verè præsens esse & contineri.

1768.

Scholium.

Duo hic observare sedulò debemus.

1.° Exposita Kellij theoremata minus fore accuratta, si admittatur ea sententia, quæ statuit materiam in puncta simplicia demùm resolvi posse. Hâc quippe semel admissâ, certus, definitusq est in unoquoq partium numerus; Unde sequitur particulam materiæ exiguam non posse inflari in sphæram concavam ac propè immensam, ita ut lamella sphærica sit corpus continuum, & nullis, aut parvis vacuis interruptum. Namq dum illa materiæ particula inflabitur, singula quibus constat puncta, magis ac magis à sese invicem discedent; atq ita demum poterit ejusdem particulæ volumen augeri, ut singulæ illius partes maximis secernantur intervallis, ac quasi per aëra dispergantur. Porrò ita dispersæ non corpus unum, nec sphæram unam efficient. Supponunt igitur Kellij Theoremata materiam infinitis divisionibus esse obnoxiam; ~~In hypothesi~~

2.do In hypothesi punctorum simplicium aliquid de iisdem theorematibus retineri potest. Scimus etenim materiam posse incredibiliter dividi; Ergo quam maximus

numerus punctorum simplicium, quæ in exiguâ materiæ particulâ continentur; proindè nullum potest particulæ cujusvis augeri & explicari volumen, mutatâ elementorum dispositione, vel auctâ distantiâ eorumdem mutuâ. Quapropter rejectis etiam Kellij theorematibus, aut saltem ad quemdam modum reductis, duo quæ hinc deducta sunt, consectaria admittere nil vetat. ——

De Voluminum & Densitatum ratione.

Conclusio.

Densitates corporum sunt in ratione compositâ ex directâ molium & inversâ voluminum; hoc est, $D : d :: \frac{M}{U} : \frac{m}{u}$. ——

Demonstr. Ad conclusionis veritatem duo requiruntur: 1° ut densitas sit eo major, dato volumine, quo major est moles: 2do. ut sit eo minor, datâ mole quo volumen est amplius: Atqui ita prorsus est: 1° enim quo major est moles sub definito volumine, eo major est numerus partium, quæ in dato spatio continentur; arctius proinde partes congregan=

=tur; Ergo eâdem proportione major est densi=
=tas: 2° quò amplius est volumen, eâdem manente
mole, tunc idem partium numerus eo majus in
spatium diffunditur, ac conseqenter partes eò remo=
=tiores à se mutuò existunt, et minor eâdem raone
fit densitas.

Ex hâc conclusione multa sequuntur: Viz.

1.° Moles sunt in ratione compositâ volu=
=minum et densitatum: Est enim $\frac{M}{U}:\frac{m}{u}::D:d$;
Ergo $M:m::DU:du$.

2.° Volumina sunt in raone directâ molium, et inversâ
densitatum. Namq ex ultimâ proportione ista
deducitur $U:u::\frac{M}{D}:\frac{m}{d}::Md:mD$.

3.° Oqales sunt densitates, qotiescumque
moles sunt ut volumina. Nam ex conclusione
$D:d::\frac{M}{U}:\frac{m}{u}$; sed si moles sunt ut
volumina $\frac{M}{U}=\frac{m}{u}$; Ergo $D=d$.

Hinc in corporibus homogeneis oqales
sunt densitates. In his enim partes sunt
continuò similes, eodemq modo dispositæ;
proindè eundem inter se situm servant,
suntq oqali numero sub eodem volumine.
Itaq in corporibus homogeneis eadem est
molium ac voluminum ratio: Ergo &c.

4.° Qando sunt moles ut densitates,
oqualia sunt volumina, et vice versâ.

Est enim semper $U : u :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$. Sed si moles sunt ut densitates, $\frac{M}{D} = \frac{m}{d}$; Ergo $U = u$.

Similiter quando $U = u$, tum $\frac{M}{D} = \frac{m}{d}$; Ergo $M : m :: D : d$.

5° Cùm moles æquantur, densitates sunt in ratione inversâ voluminum, & vice versâ, ut patet.

6° Si sint volumina ut densitates, erunt moles ut quadrata voluminum, aut densitatum. Nam, ut superiùs dictum est, habetur semper $M : m :: DU : du$. Sed ex hypothesi $U : u :: D : d$. Igitur ratio composita voluminum & densitatum est ratio duplicata; proindè $M : m :: U^2 : u^2 :: D^2 : d^2$.

7° Si densitas infinita esset, tunc etiam esset moles infinita, & volumen finitum; vel moles esset finita, & volumen infini=tissimum.

Hinc sequitur quamdiu moles finitam rationem habet ad volumen, corpus perfectè densum esse non posse; cumque in orbe nullum corpus datum sit, cujus moles rationem infini=tam ad volumen obtineat, sequitur id quod tentata hactenùs experimenta confirmant, ex mundanis corporibus nullum perfectè

 esse densum.
Hactenus de corporibus solitariè spectatis, nullâq motuum communicaone inter se sociatis. Nunc verò de motu, deq motuum communi=
=catione dicendum, & universum mundi sys=
=tema explorandum nobis est.

Sectio 2da

De
Corporibus motu agitatis, & communi legum socitate conjunctis:

Ac 1o. qdm
De
Corporibus terrestribus.

Motus corporum est mutatio sitûs atq distantiæ, respectu aliorum corporum aut quiescentium, aut diversâ ratione progredientium.

Motum nullum fieri posse subti=
=lius qàm verius disputabat Zeno; nega=

=bat quippe motum corporis, aut in eo loco in quo esset, aut in quo non esset, posse contingere; aliaque multa acutissima proferebat de corporum motu & velocitate, in quibus disceptandis nequaquam morabimur. Illud unum monuisse satis erit, nullam à nobis mentionem loci in definiendo motu factam esse; eâque re proponi solitis à Zenone Difficultatibus omnem aditum esse interclusum.

Jam verò feruntur corpora vel motu libero & expedito, vel contrariis motibus, unde conflictus inter illa existat, nisusque contentio. Agemus 1.º de liberis corporum motibus: 2.do de motibus impeditis, sive contrariis. Sed prius generalia quaedam principia ponenda sunt.

Axioma 1.m

Corpus quodlibet naturâ suâ indifferens est ad motum vel ad quietem.

Hinc sequitur 1.º corpus semel quiescens, aeternùm in quiete mansurum, si nullâ externâ impressione moveatur.

2.do motum corpori semel impressum, tamdiu perseveraturum, quamdiu nullum

occurret obstaculum, quo destruatur atque frangatur.

Verumtamen accuratè notandum est non tam ex propriâ corporis indifferentiâ oriri istam motûs perseverantiam, quam ex lege à Deo liberè constitutâ, quae est causa externa corpus movendum perpetuò impellens, seu in incepto motu indesinenter sustinens.

Enunciatae igitur sententiae ea vis est, ut corpus nihil habeat in sese, per quod semel acceptum motum temperare valeat.

3°. motum à rectâ lineâ deflectere nunquam posse, nec fieri curvilineum, nisi propter obices constitutos, vel per actionem causae moventis continuò variatam.

4°. Non accelerari aut retardari motum nisi per influxum causae exterioris.

Axioma 2dum

Corpus moveri non potest, nisi quod aliquis motus ipsi communicatur extrinsecus.

Talis porrò indigentia motus aliundè recipiendi ut corpus loco cedat, vis inertiae seu vis resistendi appellatur.

Cum autem illa vis singulis et æquè materiæ particulis conveniat, major proindè est, ubi major est moles. Est igitur vis inertiæ proportionata moli corporis movendi, ut mirum nemini debeat videri id quod experientia declarat, nempe corpus quodlibet eo difficilius dimoveri, quo majori sit pondere, et moli duplo imprimi non posse eamdem velocitatem, nisi per vim duplo majorem.

Articulus 1.us

De

Motu libero ac simplici.

Corpora quæ motu simplici ac libero feruntur, vel moventur æquabiliter, vel accelerantur aut retardantur.

Paragraphus 1.us

De

Motu æquabili.

38. 2do temporibus ægalibus spatia ægalia perlustrentur, motus tum ægabilis dctr.

Conclusio 1.ª

Quantitas motûs, seu vis, æstimatur è mole per velocitatem multiplicatâ, id est, $F = m u$.

Demonstr. Singulis in partibus corporis moti tanta est celeritas quanta in corpore toto; secùs enim corpus in partes divide=retur. Ergo celeritas toties repetitur, quot sunt in corpore moto partes: atqi celeritas sic repetita, est tota ipsa qan=titas motûs, seu tota corporis vis. Ergo $F = m u$.

Præterea corpus eò difficilius transfertur, qo majori est mole; Ergo ut transferatur, eò major qod vis illi imprimenda est: atqi vis quantitas motus, qo in eo est, vi sibi im=presso ægalis est; Ergo qantitas motus pri=mùm seqitur raonem molis.

Sed præterea eò major vis corpori trans=ferendo impenditur, qo majorem ad dis=tantiam est dato tempore tranferendum, seu qo celeriùs movendum est; Ergo crescit etiam vis, qâ idem corpus agitur, in raone velocitatis.

Itaq. est qantitas motus in ratione compositâ velocitatis & molis.

Corollarium 1.m

Vis corporis tum est infinitissima, cùm celeritas est item infinitissima, molesque finita: vel cùm finita est celeritas, moles autem infinitissima. Hinc oritur discrimen virium pressionis ac percussionis.

Corollarium 2.dum

Locus geometricus, qo exhibetur vis ogabilis, est area rectanguli, cujus basis molem repræsentet, altitudo celeritatem.

Corollarium 3.m

Molis ac velocitatis mensuræ, sunt $u = \frac{F}{m}$, $m = \frac{F}{u}$.

Corollarum 4.tum

Si conferantur duorum corporum vires, habebitur $F : f :: MU : mu$; undè oqatio generalis $fMU = Fmu$

Conclusio 2.da

In motu æquabili mensura velocitatis est ratio spatii per tempus divisi; id est, $u = \frac{s}{t}$;

Demonstr. Corpus eo celerius move=
=tur, quo majus spatium intra definitum tempus decurrit: pariter eo velocius mo=
=vetur, quo minus insumit temporis in decur=
=rendo spatio definito. Ergo crescit cor=
=poris velocitas directè ut spatium, in=
=versè ut tempus; ac consequenter $u = \frac{s}{t}$.

Hinc 1.° $s = tu$; $t = \frac{s}{u}$.

2.do Si duo corpora æquabiliter moven=
=tur, tunc est $U : u :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$; undè æquatio generalis $sTU = Stu$; è quâ sponte con=
=sequuntur variæ spatiorum, temporum, & velocitatum rationes.

Problema I.^{m}

Datis primo intervallo a duorum corporum in eâdem lineâ rectâ progredien=
=tium, velocitatibus U & u, totoq motûs

tempore = $\underline{t}$, invenire intervallum ulti=
=mum, quo, peracto motu a se invicem
ambo corpora distabunt? ——

Solvitr. Vel conspirant motus, vel sunt
contrarii.

1°. in hypothesi motuum conspirantium,
$\underline{U}$ vel major est, vel minor qam $\underline{u}$. Si
prius, decrescent singulis instantibus
intervalla ttm qantum $\underline{U}$ superat $\underline{u}$;
proindè per totum tempus $\underline{t}$ facta inter=
=vallorum imminutio erit = $\underline{t}\times(U-u)$. Si
posterius, crescent intervalla singulis in=
=stantibus ttm, qantum $\underline{u}$ superat $\underline{U}$; proindè
per tempus $\underline{t}$ accretio ois intervallorum
erit = $t\times(u-U)$. Atqi in priori casu inter=
=vallum ultimum $\underline{x}$, eqat intervallum 1.um
$\underline{a}$, demptâ accessionum summâ per tempus
$\underline{t}$. Igitur $\underline{x} = a - t\times(U-u) = a + tu - tU$.
In altero autem casu ultimum intervallum
$\underline{x}$ eqabit primum, additâ recessionum
summâ, seu $\underline{x} = a + t\times(u-U) = a + tu - tU$.
Formula igitur pro utroq casu est eadem.

2do. In hypothesi motuum contrario=
=rum aut a se mutuò discedunt, aut sibi
ex adverso occurrunt. In priori casu ultima

distantia habebitur, si primæ distantiæ tota recessuum summa per tempus t adjicia=
=tur: atqui singulis instantibus quantitas recessûs $= U+u$, ideòque per tempus $t = t \times (U+u)$. Igitur $x = a + tu + tU$. In altero casu dis=
=tantia ultima obtinebitur, si ex a detra=
=hatur tota accessuum summa per tempus t, quæ est $= t \times (U+u)$; erit ergo $x = a - tu - tU$. Itaque pro utroque casu habetur formula $x = a \pm tu \pm tU$.

Problema 2dum

Datâ distantiâ ultimâ itemque primâ, & velocitatibus corporis utriusque, invenire tempus insumendum, donec corpora ad ultimam illam deveniant?

Solutio. 1.º In formulâ præcedenti pro hypothesi motuum conspirantium, sit $x = \omega$. Erit $\omega = a + tu - tU$. Ergo $t = \frac{a-\omega}{U-u}$.

2.do In hypothesi motuum contrariorum $\omega = a \pm tu \pm tU$. Ergo $t = \frac{\omega - a}{U+u}$, vel $\frac{a-\omega}{U+u}$.

Si supponatur $1 : n :: a : \omega = an$, substi=
=tuendo habebimus 1.º $t = \frac{1-n}{U-u}a$; 2.º $t = \frac{n-1}{U+u}a$, vel $t = \frac{1-n}{U+u}a$.

Si inveniendum sit quo tempore ambo corpora in eodem spatii puncto futura sint, fiet $w = 0$; atq ita 1.° $t = \frac{a}{U-u}$; 2.° $t = \frac{a}{U+u}$: ——

Si supponantur corpora ex eodem puncto in diversa proficisci, erit tunc $a = 0$; itaq $t = \frac{w}{U+u}$ ——

Problema 3.m

Positis iisdem conditionibus ac supra, invenire spatium qod ab alterutro corpore, seu $\underline{M}$ seu $\underline{m}$ tum erit confectum, cum distabunt illa a se invicem intervallo $\underline{w}$? —

Solvitr. In duabus Oquationibus Problematis 2.di in locum $\underline{t}$ substituenda est ratio spatii ad velocitatem; sicque obtinebitur 1.° pro $\underline{M}$, $\frac{S}{U} = \frac{a-w}{U-u}$, unde: $S = \frac{a-w}{U-u}U$; ~~vel $\frac{a-w}{U+u}$; ideoq $S = \frac{w-a \text{ vel } a-w}{U+u}$~~;

ac pro $\underline{m}$, $\frac{s}{u} = \frac{a-w}{U-u}$; unde $s = \frac{a-w}{U-u}u$:

2.da pro $\underline{M}$, $\frac{S}{U} = \frac{w-a}{U+u}$, vel $\frac{a-w}{U+u}$; ideoq $S = \frac{w-a \text{ vel } a-w}{U+u}$; & pro $\underline{m}$, $\frac{s}{u} = \frac{w-a}{U+u}$, vel $\frac{a-w}{U+u}$; ergo $s = \frac{w-a \text{ vel } a-w}{U+u}u$ ——

Hic qemadmodum antea, supponi potest $\underline{w}$ vel $\underline{a} = 0$.

Scolium.

Differentia $U-u$ velocitatum absolutarum in motibus conspirantibus, earumdem vero summa $U+u$ in motibus contrariis, dctr velocitas rsptiva duorum corporum: ea nempe est qantitas, qâ ambo corpora aut ad se accedunt singulis instantibus, aut à se recedunt.

Hinc velocitas respectiva duorum corporum, qæ in eadem lineâ rectâ eodem feruntur, est ad velocitatem absolutam alterutrius, dato tempore, qemadmodum distantia initialis, est ad spatium ab eodem corpore conficiendum usq ad punctum concursûs.

Nam cùm tempus est idem, $U:u::S:s$;

Ergo $U-u : S-s = a :: U:S::u:s$.

Si corpora moventur versùs puncta opposita, habebitur $U+u : S+s :: U:S::u:s$. cùm autem corpora sibi occurrunt, $S+s$ est distantia initialis $= a$. Qod si mota in contrarium corpora ex ipso contactu discedant, est tum $S+s$ distantia ultima.

Paragraphus 2dus.

De Motu accelerato & retardato.

Motus acceleratus dctr is, qi singulis temporum articulis nova suscipit incrementa; retardatus autem is, cui continua accidunt decrementa. Qo si oqalia sint, motus dctr tunc oqaliter acceleratus aut retardatus.

Conclusio 1.a

In oi acceleratione finitâ & continuâ, oqatio velocitatis in fine tempusculi ∂t est $u = \frac{\partial s}{\partial t}$.

Demonstr. Qocunq sit acceleratio finita & continua, potest intra tempusculum ∂t spectari motus velut oqabilis: sed in motu oqabili velocitas ostimatur ex spatio per tempus diviso; Ergo $u = \frac{\partial s}{\partial t}$.

Hinc seqitur 1° $\partial u = \partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$.

2do Si tempus exhibeatur per abscissam curvo cujuslibet, spatium autem per Ordinatam, tunc velocitatem in fine tempusculi per Tangentem anguli, qem curva facit cum Axe, exprimendam esse. Nam hujus anguli Tangens $= \frac{\partial y}{\partial x}$; sed ex hypothesi $s = y$, $t = x$. Ergo tang: $= \frac{\partial s}{\partial t} = u$.

Conclusio 2.da

Æqatio spatii in qâcumq accelerâone finitâ et continuâ, est $s = \int u\,dt$.

Demonstr. Ex Conclusione 1.â $u = \frac{ds}{dt}$, seu $ds = u\,dt$; Ergo $s = \int u\,dt$.

Corollarium 1.m

Locus geometricus spatii in qâvis accelerâone confecti, est area figuræ in qâ velocitates ordinatis, tempora abscissis exhibeantur. Area quippe hujus figuræ $= \int y\,dx$; sed ex hypothesi $y = u$, $t = x$; proindè $\int y\,dx = \int u\,dt$.

Hinc concludendum 1.o ad æstimandam quantitatem spatii acceleratè decursi, quadraturam curvarum posse adhiberi:

2.do Si æqabilis sit acceleratio, spatium confectum exhiberi per aream trianguli rectanguli.

Corollarium 2.dum

Quotiescumq velocitas est functio aliqa

temporis, spatium accelerate emensum facilè inveniri potest. Tunc enim $u = t^n$. Ergo $u\,dt = t^n dt$; adeoq. $\int u\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{tu}{n+1} = s$.

Nunc sit $n = 0$, q° hypothesis est accelerationis nullius, sed motûs æqabilis atq. constantis; tunc $s = tu$, ut antea; sit $n = 2$; tunc $s = \frac{1}{3} tu$; si $n = \frac{1}{2}$, erit $s = \frac{2}{3} tu$; si $n = 1$, sicut est in motu æqabiliter accelerato, $s = \frac{1}{2} tu$.

Hoc ultimo exemplo patet 1° spatium s acceleratione æqabili confectum, esse dimidium spatii s', quod cum ultimâ velocitate intra tempus idem æqabiliter absolveretur. In hypothesi enim accelerationis æqabilis $s = \frac{ut}{2}$; si autem æqabilis maneret velocitas intra tempus idem, tunc esset $s' = ut$. Ergo jam esset $s : s' :: \frac{ut}{2} : ut :: 1 : 2$, seu $s = \frac{1}{2} s'$.

Patet 2° in motu accelerato, q° velocitas est ut dignitati vel radici cuivis temporum analoga, tunc spatia esse in ratione compositâ velocitatum ac temporum.

Cum enim $u = t^n$, tunc $s = \frac{1}{n+1} tu$. Pari de causâ $S = \frac{1}{n+1} TU$. Ergo sit $s : S :: tu : TU$.

Corollarium 3^m.

Quamdiu velocitas est ut dignitas vel radix quævis n temporum, tunc spatia sunt ut dignitates vel radices $n+1$ temporum eorundem.

Jamdiu enim $u = t^n$, tunc ex corollario 2do $s = \frac{t^{n+1}}{n+1}$; Ergo $s : S :: t^{n+1} : T^{n+1}$.

Hinc 1.° seqitur in acceleratione æqabili spatia temporibus t & T emensa, esse ut qadrata eorum temporum. Hîc enim in acceleratione $n = 1$. Ergo $s : S :: t^2 : T^2$. Ibidem est qoq $s : S :: u^2 : U^2$.

Hinc 2do seqitur datâ ratione veloci=tatis ad tempus, si cognoscitur spatium tempore dato confectum, facilè detegi posse spatium alio qovis tempore conficiendum. Sint E: G: celeritates ut qadrata temporum. Tunc erit $t^3 : T^3 :: s : S$; Ergo $S = \frac{sT^3}{t^3}$.

Itaq si corpus per 1'' duos pedes confe=cerit, idem per 3 minuta secunda conficiet spatium $S = \frac{2 \times 27}{1} = 54$ p.

Corollarium 4^m.

Quod si velocitates fuerint in ratione inversâ temporum simplicium, erunt spa=tia temporum Logarithmis exprimenda. Tunc enim $u = t^{-1}$. Itaq $u\,\partial t = t^{-1}\partial t$; Ergo $\int u\,\partial t = \int \frac{\partial t}{t} = \log : t$, seu $s = l.t.$

Feb: 18th A 1788.

Conclusio 3ª

In acceleratione finitâ & continuâ, æquatio temporis est $t = \int \frac{\partial s}{u}$.

Demonstr. Ex ppone 1ª $u = \frac{\partial s}{\partial t}$; adeóq. $\partial t = \frac{\partial s}{u}$. Ergo $t = \int \frac{\partial s}{u}$.

Corollarium 1m.

Datâ ratione spatii ad velocitatem detegitur tempus in decurrendo spatio insumptum.

Sit $u = s^n$; tunc erit $\int \frac{\partial s}{u} = \int \frac{\partial s}{s^n} = \frac{s^{1-n}}{1-n}$; adeóq. $t = \frac{1}{1-n} \times \frac{s}{u}$; id est, tempus æstimatur parte $\frac{1}{1-n}$ spatii per velocitatem divisi. Sit E. G: $n = 0$; undè sequitur $u = 1$, qui casus est motus æquabilis. Porrò in hâc hypothesi, $t = \frac{s}{u}$. Sit autem $n = 1$; tunc $\int \frac{\partial s}{u} = \int \frac{\partial s}{s} = l.s$. Adeóq. in eâ hypothesi potest tempus exhiberi per logarithmum spatii. ~ quod contingit in acceleratione

Sit $n = \frac{1}{2}$, tunc erit $t = \frac{2s}{u}$; hoc est, in eâ acceleratione æquabili, tempus insumptum æquale est tempori, quod spatium æquabili motu percurrendum cum ultimâ velocitate requireretur.

Corollarium 2dum.

Quando velocitas est ut functio spatii, sunt

tempora in ratione directâ spatiorum & inbersâ velocitatum. Tunc enim $u = s^n$; est autem ex corollario 1.° $t = \frac{1}{1-n} \times \frac{s}{u}$; Ergo $t : T :: \frac{s}{u} : \frac{S}{U}$.

Hinc nulla in acceleratione veloci=tas est ut aliqua potentia integra spatii. Nam si esset velocitas, E:G: ut potentia 1.ª spatii, tum foret $\frac{s}{u} = \frac{S}{U}$; Ergo foret qood $t = T$, quod absurdum est. Itaq ratio velocitatum cum spatiis alia esse non potest qam velocitatum ad aliqas spatio=rum radices.

Conclusio 4.ª

Elementum vis acceleratricis æstima=tur ex producto molis in elementum celeri=tatis diviso per elementum temporis.

Demonst.ⁿ Sit illud motus accelerati elementum $= q$; hoc nomine intelligitur, ea vis acceleratrix, qo singulis insit corporis partibus.

Manifestum est qo pluribus temporum articulis ea vis exercetur, eò majorem generari motum. Ergò motûs qantitas tempusculo genita $= q\,dt$.

Sit velocitatis elementum $= \partial u$. Sit autem moles $= m$. Quoniam tempusculo ∂t est motus æquabilis, erit quantitas motus eodem tempusculo genita $= m\,\partial u$. Ergo $q\,\partial t = m\,\partial u$; ac consequenter $q = \frac{m\,\partial u}{\partial t}$.

Corollarium 1^{m}

Datâ ratione temporis ad velocitatem detegi potest nisus accelerator. Sit velocitas ut potentia vel radix n temporis, jam erit $u = t^{n}$. ~~Ergo $q = \frac{m\,n\,t^{n}}{t}$~~. Ergo $\partial u = n\,t^{n-1}\partial t$; substituendo in æquatione superiori erit $q = \frac{m\,n\,t^{n-1}\partial t}{t^{n}\,\partial t} = \frac{m\,n\,t^{n}}{t}$. Sed ex hypothesi $u = t^{n}$. Ergo $q = \frac{m\,n\,u}{t}$; id est, motus accelerati elementum æquatur producto molis & velocitatis acquisitæ in exponentem temporis divisæ per solidum tempus; sit v. g. $n = 0$; tunc erit quoque $q = 0$; id est, acceleratio erit omnino nulla, & motus æquabilis. Sit $n = 1$; tunc erit $q = m$; id est in acceleratione æquabili nisus accelerator est moli proportionatus.

Corollarium 2^{m}

Quoties elementum vis acceleratricis est ut potentia vel radix n temporis, tum

facilè detegitur velocitas.

Nam ex Conclusione 4$^{\hat{a}}$ $g = \frac{m\,\partial u}{\partial t}$; & propter molem constantem $g = \frac{\partial u}{\partial t}$; undè sequitur $u = \int g\,\partial t$: sed ex hypothesi $g = t^n$; Ergo $u = \int t^n \partial t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

Hinc sequitur 1.° hâc in hypothesi velocitates esse ut temporum dignitates vel radices $\underline{n}+1$; seu esse $u : U :: t^{n+1} : T^{n+1}$. Sit v: g: $\underline{n} = 0$, qui casus est accelerationis aequabilis, siquidem tunc $g = 1$. Hoc in casu, $u : U :: t : T$.

Sit $\underline{n} = 1$, tunc erit $u : U :: t^2 : T^2$

Sit $\underline{n} = \frac{1}{2}$, tunc $u : U :: \sqrt{t^3} : \sqrt{T^3}$

Hinc sequitur 2.do eâdem in hypothesi velocitates esse in ratione compositâ temporum & elementorum accelerationis. Ex Corollario enim 2.do $u = \frac{t^{n+1}}{n+1} = t^n \times \frac{t}{n+1}$; Sed ex hypothesi $g = t^n$; Ergo $u = \frac{g\,t}{n+1}$; proptereàque $u : U :: g\,t : G\,T$.

Corollarium 3.^{m}

Quamdiu elementum accelerationis est ut functio $\underline{u}$ celeritatis, $t = \frac{u^{1-n}}{1-n}$. Nam ex Conclusione 4.$^{\hat{a}}$ $g = \frac{\partial u}{\partial t}$, seu $\partial t = \frac{\partial u}{g}$. Sed ex hypothesi $g = u^n$; Ergo $\partial t = u^{-n} \partial u$, adeòque $t = \int u^{-n} \partial u = \frac{u^{1-n}}{1-n}$

Hinc 1.° $t : T :: \frac{1}{u^{n-1}} : \frac{1}{U^{n-1}}$. Sit $\underline{n} = \underline{0}$; $t : T :: u : U$, quemadmodum est in acceleratione equabili. Si autem $\underline{n} = 1$; $t = T$. Hoc exemplo patet nunquam accelerationis elementum esse ut potentiam primam velocitatis.

Hinc 2.do in factâ hypothesi tempora sunt directè ut velocitates, inversè ut accelerationis elementa. Nam $t : T :: u^{1-n} : U^{1-n} :: \frac{u}{u^n} : \frac{U}{U^n} :: \frac{u}{g} : \frac{U}{G}$.

Conclusio 5.a

Æquatio vis acceleratricis finitæ est $m\,u = \int g\,dt$.

Demonstr. Ex Conclusione 4.â $m\,du = g\,dt$; Ergo integrando ob molem constantem erit $m\,u = \int g\,dt$.

Corollarium 1.m

Locus geometricus vis acceleratricis est area curvæ, in quâ ordinatæ nisus acceleratores, abscissæ verò tempora exhibent. Est ex hypothesi $y = g$; $x = t$: Ergo $\int y\,dx = \int g\,dt$.

Corollarium 2^{dum}.

Quando elementum accelerationis est functio n temporis, vis acceleratrix finita $= \frac{t^{n+1}}{n+1}$, ut patet.

Hinc 1°. vires acceleratrices sunt inter se :: $t^{n+1} : T^{n+1}$.

Hinc 2°. eædem vires sunt in ratione compositâ nisuum suorum Elementarium & temporum per quæ isti nisus exercentur; loco enim t^n & T^n substitui tunc possunt g & G.

Conclusio 6ª.

In omni acceleratione est velocitas acquisita $u = \sqrt{\int 2g\,ds}$.

Demonstr. Ex Conclusione 4ª $m\,du = g\,dt$; & ob molem constantem $dt = \frac{du}{g}$. Ex Conclusione autem primâ $u = \frac{ds}{dt}$; ideoque $dt = \frac{ds}{u}$; Ergo $\frac{du}{g} = \frac{ds}{u}$; proinde $2u\,du = 2g\,ds$, ac denique $u^2 = \int 2g\,ds$; Ergo $u = \sqrt{\int 2g\,ds}$.

Corollarium 1.^{m}

Locus geometricus velocitatis in fine spatii acquisitæ est area curvæ; in quâ ordinatæ nisûs acceleratores, abscissæ autem spatia representant.

Corollarium 2.^{m}

Cum elementa virium acceleratricium sunt ut functiones n spatiorum, velocitates sunt radices quadratæ functionum $n+1$ spatiorum eorumdem. Ex hypothesi enim $g = s^n$; Ergo substituendo in æquatione conclusionis 6.ta erit $u = \sqrt{2 s^n \partial s}$; seu integrando $u = \sqrt{\frac{s^{n+1}}{n+1}}$; adeoq $u : U :: \sqrt{s^{n+1}} : \sqrt{S^{n+1}}$. Sit V: G: $n = 0$ seu $g = 1$, ut contingit in accelerat[ione] æquabili; tunc erit $u : U :: \sqrt{s} : \sqrt{S}$. Sit $n = 1$; tunc $u : U :: s : S$. Hinc sequitur in eâdem hypothesi fore $u : U :: \sqrt{gs} : \sqrt{GS}$.

Corollarium 3.^{m}

Quamdiu accelerationis elementa sunt ut functiones n spatiorum, tempora sunt inversè ut radices quadratæ functionum $n-1$ spatiorum eorumdem.

Etenim ex Conclusione 6.ta $u = \sqrt{g \partial s}$; ex Conclusione 1.^{a} $u = \frac{\partial s}{\partial t}$. Ergo $\partial t = \frac{\partial s}{\sqrt{2 g \partial s}}$; proindè

$t = \frac{\int ds}{\sqrt{2gds}}$. ~~~~

Porrò ex hypothesi $g = s^n$; Ergo $t = \frac{\int ds}{\sqrt{2s^n ds}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{s^{n+1}}{n+1}}}$. Adeoq $t : T :: \frac{s}{\sqrt{s^{n+1}}} : \frac{S}{\sqrt{S^{n+1}}}$. ~~~

Patet autem esse $\frac{s}{\sqrt{s^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{s^{n-1}}}$; Ergo $t : T :: \sqrt{s^{n-1}} : \sqrt{S^{n-1}}$. Sit $n = 0$, seu $g = 1$, ut in acceleratione æquabili; tunc ferit $t : T :: \sqrt{s} : \sqrt{S}$. Quod si esset $n = 1$, tunc habe=retur $t : T :: 1 : 1$; seu $t = T$, quod absurdum est. ~~~~

Scholium.

Cæterum numquam possunt nisi acce=leratores multiplicatam obtinere spatio=rum rationem. Nam quoties locum habet ea ratio, tunc exponens n integer est, & unitate major; Ergo $S^{n-1} > s^{n-1}$; Ergo esset $t > T$, quod in acceleratione continuâ repugnat. ~

Conclusio 7.ª

Nisum acceleratorem exprimit subnormalis in curvâ velocitates exhibente.

Demonstr. In curvâ qualibet subnor=

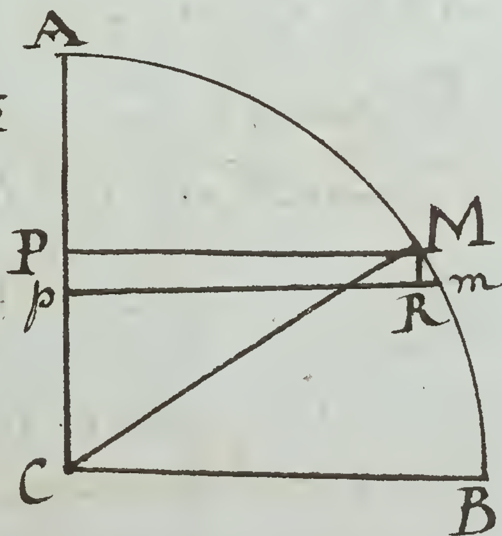
=malis $= \frac{y\,dy}{dx}$; sed ex hypothesi $y = u$, $x = s$; Ergo in eâ curvâ subnormalis $= \frac{u\,du}{ds}$. Jam verò ex Conclusione 6.ª $u\,du = g\,ds$; Ergo $g = \frac{u\,du}{ds}$.

Corollarium.

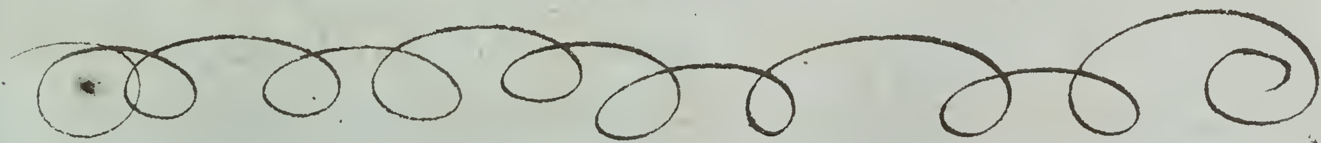
Si curva velocitatum est Parabola, tunc accelerationis elementum $= \frac{P}{2}$. Hinc in eâdem hypothesi nisus accelerator est constans, et consequenter acceleratio æqua=bilis.

Conclusio 8.ª

Si nisus accelerator est distantiæ à puncto dato C proportionatus, velocita=tem in fine spatii AP acquisitam exhibet sinus rectus MP.



Demonstr. Sit $AP = s$, diameter $= 2a$; erit $M.P. = \sqrt{2as - s^2}$. Sed ex Conclusione 6.ª $u^2 = \int 2g\,ds$; ex hypothesi autem $g = a - s$. Ergo $u^2 = \int 2a\,ds - 2s\,ds = 2as - s^2$; igitur $u = \sqrt{2as - s^2}$ = sinum rectum arcûs AM.



Conclusio 9ª.

In eâdem hypothesi tempus exhiberi potest arcu A M.

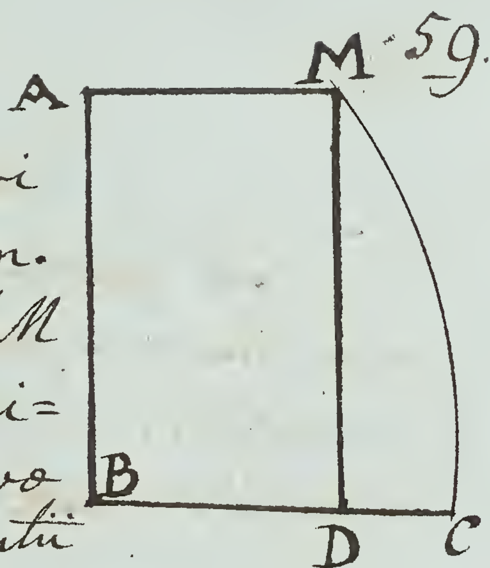
Demonstr. Ex conclusione 6.ª $u = \sqrt{2g\partial s}$. Ex conclusione autem 1.ª $u = \frac{\partial s}{\partial t}$. Ergo $t = \frac{\int \partial s}{\sqrt{2g\partial s}}$. Adeoq integrando $t = \frac{\int \partial s}{\sqrt{2as - s^2}}$. Jam verò similia sunt triangula M, P, C; M, R, m. Ergo MP : MC :: MR : Mm; seu $\sqrt{2as-s^2} : a :: \partial s : Mm = \frac{a\partial s}{\sqrt{2as-s^2}}$. Ergo arcus integer $AM = \frac{\int a\partial s}{\sqrt{2as-s^2}}$. Et propter con=stantem a, arcus idem $= \frac{\int \partial s}{\sqrt{2as-s^2}}$. Ergo tempus accelerationis meritò exhibetur arcu A M.

Extracta est Conclusio 9ª ex Newtonii Prin: Philos: Nat: lib. 1º.

Conclusio 10ª.

Si corpus velocitate finitâ jam animatum subjicitur accelerationi, tunc locus geome=tricus spatii totius erit Trapezois — mixtilineus, cujus altitudo tempus, basis autem utraq velocitates initialem & ultimam

exhibeant.



Demonstr. Ex basi minori ducatur Normalis MD in alteram. Jam area parallelogrami ABDM exhibet spatium æqabili veloci=tate confectum. Area verò curvæ CDM locus geometricus est spatii accelerate decursi. Ergo summa utriusque locus est spatii totius.

Corollarium 1.m

Sub acceleraone æqabili rectilineus est trapezoïs, cujus area spatium exprimit. Hinc spatium acceleraone æqabili confectum æqatur tempori ducto in semisummam velocitatum initialis & ultimæ, id est $S = \frac{u+U}{2} \times t$. Hinc etiam spatium idem æqatur producto temporis in velocitatem, quæ sit arithmeticè media inter velocitates initialem & ultimam.

Hinc demùm in eâdem hypothesi spa=tium acceleratè confectum majus est mediâ parte spatii, quod cum ultimâ ve=locitate per tempus idem æqabili motu absolveretur. Est enim $\frac{u+U}{2} \times t > \frac{Ut}{2}$.

Corrollarium 2dum.

Si velocitas initialis est infinitissi=
=ma, tunc spatium æqabili acceleratione
decursum exprimit area trianguli. Tunc
enim Trapezoïs desinit in triangulum.

Problema.

Dato infinitissima est velocitas initia=
=lis, invenire spatia successivis tempori=
=bus æqali acceleratione decurrenda?

Solutio. Liquet spatium primo tempore
t confectum, esse $S = \frac{ut}{2}$. Jam verò initio
secundi temporis existit velocitas u primo
tempore acquisita: insuperq altera velo=
=citas priori æqalis secundo acquiritur.
Ergo velocitas U in fine temporis secundi
existens, dupla est velocitatis in fine
primi temporis acquisitæ, id est $U = 2u$;
itaq spatium secundo tempore conficien=
=endum $s' = \frac{u+2u}{2}t = \frac{3ut}{2}$. Tertii temporis
initio velocitas $= 2u$; hoc tempore tertio
perseverat; insuper autem eodem tempore
acquiritur velocitas u; Ergo in fine tertii

temporis tota velocitas $= 3u$ ———

Itaq juxta Conclusionem 1.am spatium tertio tempore decurrendum, est $s''' = \frac{2u+3u}{2}t$ $= \frac{5ut}{2}$. Atq ita deinceps. Spatia igitur singulis temporibus motu æqabiliter acce=lerato confecta, crescunt ut numeri impares 1·3·5·7·9· &c.

Scolium.

Pendet motus retardati theoria ex principiis modo expositis. Quo qdm ut motui retardato probe possint applicari, procedentes æqationes contrario sensu accipiendas esse facilè patet. Itaq in motu retardato erit $ds = -u\,dt$, $g\,dt = -m\,du$, $g\,ds = -mu\,du$, &c. ———

Applicantur ea quæ dicta sunt, ad descensum corporum gravium liberum.

Si corpus ad perpendiculum liberè de=cidit, tunc motu æqabiliter ~~in~~ accelerato agitur. Observentur itaq in lapsu corporum gravium leges oes accelerationis æqabilis. Quas hic brevi complexione ex dictis colligere juvat. Viz: ———

1°. Velocitates sunt ut tempora: ~

2do. Spatium acceleratè confectum est subduplum spatii, qod cum ultimâ velo=citate, intra idem tempus, œqabili motu absolveretur: ~

3°. Spatia continuis temporibus emen=sa sequuntur numeros impares 1.3.5.7. &c.

4°. Spatia integra sunt ut quadrata velocitatum; sunt qoq eadem in raone duplicatâ temporum. ~

Diriguntur autem corpora per actio=nem gravitatis decidentia, juxta radium globi terrestris, seu juxta lineam horizonti perpendicularem. Atq hinc sequitur, qoties per basim corporis transit directio gravitatis, nullum periculum esse, ut delabatur corpus. Gravitas enim totius corporis spectari potest, tanqam in quo=dam puncto coadunata (punctum illud, cui viz. si innitatur corpus, immotum stat & sustinetur, mechanici vocant gravitatis centrum); punctum vero istud tamdiu insistet basi, qamdiu in basim porrecta erit directio gravitatis. ~

Hinc causa intelligitur, ob qam turres qodam inclinatè l: g: Bononiensis

& Pisana ꝯ corruant: etsi illa qdm anno 1110 excitata ad altitudinem 130 pedum assurgat, & perpendiculum ex apice illius demissum discedat à basiis intervallo 9 pedum. Hoc vero anno 1163º extructa altitudinem habeat cubitorum 78, intervallumq intercedat perpendiculum inter & basim cubiti 1 + $\frac{1}{3}$.

Eadem observatio (ut obiter dicam) variis motibus animantium explicandis inservit; cur v: g: gibbosi, vel qui aliud qdpiam oneris tergo gerunt, caput ante se proferant, nempe ut sit aequale utrimque pondus, & ipsi in medio librati hinc & inde pariter queant consistere. Explicatur item qare caput retro ferant, qui protuberantem ventrem gestant; cur ii qorum manus altera qodam pondere gravatur, alteram extendant; cur ii qui montem conscendunt, capite promisso, corpus inclinent, qui vero descendunt rectam cervicem, & retro inclinatam ferant; cur demum quadrupedes nunqam ambos dextros, vel ambos sinistros pedes eodem tempore moveant.

(1788)

Problemata quædam ad corporum lapsum pertinentia.

Primum.

Cognitâ altitudine, ex quâ corpus intra tempus datum cecidit, invenire spatia singulis dati temporis partibus confecta?

Solvitr. Sit cognita altitudo $= s$, tempus datum $= t$, spatium primâ temporis parte confectum $= x$. Erit $t^2 : 1 :: s : x = \frac{s}{t^2}$: Spatium alterâ temporis parte confectum erit $x' = \frac{3s}{t^2}$; parte tertiâ $= \frac{5s}{t^2}$: 4ª verò parte $x'' = \frac{7s}{t^2}$, & sic deinceps.

Secundum.

Datâ altitudine ex quâ decidit corpus per tempus cognitum, invenire altitudinem, ex quâ delaberetur per quodcumq aliud tempus datum?

Solvitr. Sit data altitudo $= s$, quæsita $= x$, sint tempora cognita $= t$ & T. Erit $t^2 : T^2 :: s : x = \frac{T^2}{t^2} \times s$.

Tertium.

Invenire altitudinem, ex qua delaberetur corpus per tempus cognitum V: G: per 4''.

Solvitur. Observatum est à corpore juxta lineam verticalem decidente percurri pedes 15.1 intra unum minutum secundum. Ergo erit

$1'' : 16'' :: 15{\cdot}1 : x = 241{\cdot}6.$

Scholium.

Potest ejus probblematis ope construi tabula altitudinum, ex quibus intra tempus datum decideret corpus grave. In tabulâ seqenti negliguntur Fractiones pedum, nempe Pollices, & Lineae.

Tabula descensuum.

Tempora. Minuta 2da.	Altitudines. Pedes.
1......	.....15.
2......	.....60.
3......	.....135.
4......	....241.
5......	....377.
6......	....543.
7......	....739.
8......	....965.
9......	....1221.
10.... &c.	....1508. &c.

66. Ex hoc tabulâ patet quanta sit difficultas tentandi experimenta de corporum gravium descensu verticali; difficille enim reperiuntur altitudines lapsibus æstimandis idoneæ. Eadem verò Tabula (saltem quoad numeros integros, seu pedes qbs constat) vix latum unquem discrepat ab iis experimentis, quo ~~ter~~ lata hactenùs fuere.

Quartum.

Cognito tempore, per quod ex datâ altitudine corpus decidit, invenire tempus ad lapsum ex aliâ altitudine requisitum?

Solvitr. Sit tempus quæsitum $= \underline{x}$: erit itaq $s : S :: t^2 : x^2 = \frac{S}{s} t^2$; adeoq $= t\sqrt{\frac{S}{s}}$.

Quintum.

Invenire tempus à corpore insumendum, ut ex altitudine cognitâ dilabatur?

Solvitr. Corpus quodlibet, ut jam antea observatum est, insumit 1'' in descensu ex altitudine 15 pedes. Sit illud spatium $= \underline{s}$; sit altitudo altera $= \underline{S}$: sit tempus quæsitum $= \underline{x}$. Erit $s : S :: 1'' : x^2$; Ergo $x = 1'' \times \sqrt{\frac{S}{s}}$.

~~[illegible]~~ Feb: 22. A: 1798.

Sextum.

Invenire celeritatem a corpore decidente ex datâ altitudine comparandam? ——

Solvitr. Quoniam corpus solâ actum gravitate æqabiliter accelerato motu de=labitur, ut jam ita pridem notatum est; Erit $s = \frac{ut}{2}$: qapropter $u = \frac{2s}{t}$. ——

Articulus 2dus

De Motibus variis, seu partim, seu ex toto oppositis.

Corpus idem multiplici impulsu & vario simul agi potest, ex quo deinde nascitur sæpe mo=tuum pugna atq conflictus. Quod si motus diversi ex omni parte non opponantur, desinit vi=rium conflictus in communem concordiam, eo tamen pacto, ut majores affectus viribus validioribus tribuantur, accuratâ pro=portione servatâ, atq hoc motuum compositio appellari solet. Sin autem motus perfectè sibi & ex diametro opponuntur, nulla tum corporibus foederas, nullaq pax intercedit:

Sed vis fortior omni suo impetu debiliorem frangere ac penitus destruere conatur. Quod demum assecuta, propriis flectit agitq. imperiis. Quâ lege id fiat, investigabimus; sed prius de Motu composito generatim dicendum.

Paragraphus 1.us

Theoria motûs compositi.

Si conspirant oes causæ, qbs corpus impellitur, tunc satis apertè liquet corpus movendum cum summâ velocitatum, qas a singulis acceperit. Si ex adverso agant, cum differentiâ. Verum o ~~tam~~ facilè exponi potest, qid diversæ causæ effecturi sint, si in varias partes propellere conentur.

Conclusio 1.a

Si virium directiones angulum faciunt, tunc vis utraq. duos habet nisus, alterum parallelum, lineæ cui insistit corpus, alterum perpendicularem.

Probatr. Vires merito æstimantur ex effectibus, qos dato tempore producunt; Atqui experientia continuâ docet, ubi virium directiones angulum faciunt, tunc duos esse effectus, alterum paral=
=lelum, alterum perpendicularem. Sic v: g: si baculo planum obliquè percu=
=titur, baculus juxta superficiem plani progreditur, qod qdm fieri nequit, nisi per nisum eidem plano parallelum: Deindè baculus premit planum; quod qdm à solo nisu perpendiculari oritur. Ergô &c

Conclusio 2da

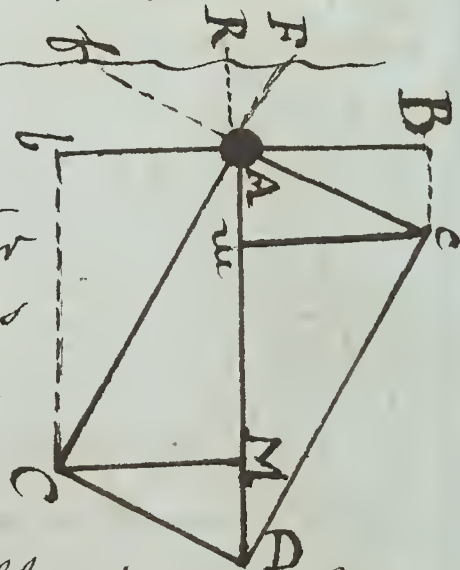
Vis qâ obliquè percutitur planum exprimitur Sinu recto anguli incidentiæ, vis parallela per Cosinum, vis primitiva per Sinum totum, vis amissa per Sinum versum

Demonstr. Primam partem satis est demonstrasse. Porrò vis, qâ percutitur planum est ut velocitas, qâ corpus ad planum accedit. Est proindè ut spatium, qod corpus accedendo percurrit. Spatium

verò istud est ipsum spatium, quo à plano distabat accessus initio; atqui hoc distan=
=tia à plano est Sinus rectus anguli inci=
=dentiæ: Ergò vis quâ obliquè percutitur planum, exhibetur Sinu recto anguli incidentiæ; Ergo &c.

Conclusio 3.a

Cum virium directiones angulum effi=
=ciunt, tunc corpus descriptusum est dia=
=gonalem parallelogrami virium direc=
=tionibus superstructi.



Demonstr. Sit corpus in puncto A constitutum pellatur vi F versùs C, vi autem f versùs c. Per punctum A ducatur linea recta Bb, supra quam agatur Normalis indefinita AD. Jam vis f corpus pelleret in c; Ergò ea vis corpus ex lineâ Bb depelleret quantitate bc, ex Normali autem depelleret quantitate mc, itaque vis f idem efficit ac duo vires, qua=
=rum altera f'' corpus dimoveret ex lineâ Bb, altera f''' corpus dimoveret ex normali AD. Pari de causâ vis F idem efficit ac vires duo F' & F'', quarum altera

ex Bb, altera ex AD corpus retraheret. Jam parallelogrammus absolvatur; æqualia erunt triangula Amc, CMD; igitur MC=mc, seu F''= f''. Aliunde verò contraria sunt harumce virium directiones; vires ergo ~~contrariæ~~ istæ ~~sunt~~ prorsùs eliduntur. Quamobrem solis viribus F' & f' corpus reipsa movendum est; Atqui per hanc utramque vim corpus solam & totam diagonalem describet; siquidem ob prædictam triangulorum Amc, CMD æquali=
=tatem, BC + bc = F'+ f' = AD. Ergo &c.

Corollarium 1.^m

Vis unica R, quæ diagonali AD exhiberetur (hoc composita dicitur) eundem habet effectum ac ambo simul vires F, f, quæ lateribus exprimuntur.

Hinc datis viribus plurimis cum earum directionibus, potest vis unica substitui, quæ eundem ac ipsæ vires ef=
=fectum obtineat.

Corollarium 2.^dum

Vis composita mutatur, quoties variatur directionum angulus, licet eædem rema=
=neant vires singulæ:

72. Neq tn hinc sequitur vim compo=
=sitam eâdem ratione immutari ac direc=
=tionis utriusq angulum. Non sunt enim
sinus, qbs vires exprimuntur in ratione
angulorum, ut ex Trigonometriâ notum est.

Corollarium 3.m

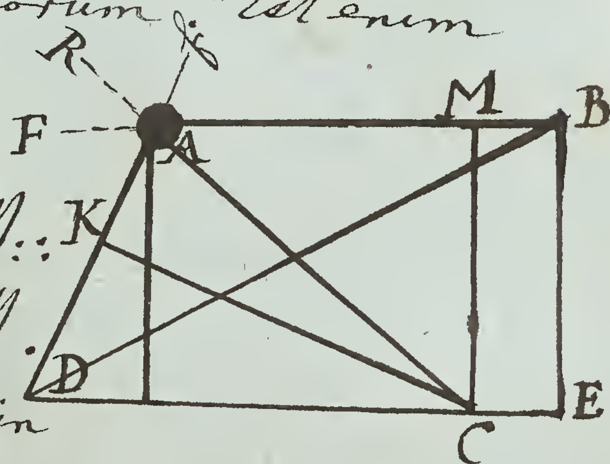
Potest eadem vis composita exurgere
ex concursu virium maximè diversarum.
Hinc ex datâ vi compositâ o potest erui
cognitio virium singularum: Oportet
praeterea virium rationem cognitam esse,
vel angulum directionis utriusq.

Corollarium 4.m

Sunt tres illæ vires ut sinus angu=
=lorum suis directionibus oppositarum.
Cùm enim singulæ vires lineis
singulis exhibeantur F : R :: AC : AD;
Sed in triangulo ACD, Sin. u : Sin. o :: AC : AD.
Ergo F : R :: Sin. u : Sin. o. Pariter f : R ::
Sin. u : Sin. o; Denum F : f :: Sin. u : Sin n.
Ergo sunt vires ut sinus angulorum suis
directionibus oppositarum. Hinc facile
patet esse $R = \frac{\text{Sin. o}}{\text{Sin. u}} F = \frac{\text{Sin. o}}{\text{Sin. n}} f$; $F = \frac{\text{Sin. u}}{\text{Sin. o}} R$
$= \frac{\text{Sin. u}}{\text{Sin. n}} f$; $f = \frac{\text{Sin. n}}{\text{Sin. o}} R = \frac{\text{Sin. n}}{\text{Sin. u}} F$.

Corollarium 5.^m

Ex iis tribus viribus duo qolibet sunt in raone inversâ perpendiculorum ex directione tertio in suas directiones actorum. Est enim F : f :: CD : BC. Jam verò similia sunt triangula CDK, CBM. Ergo CK : CM :: :: CD : BC; itaq F : f : CK : CM. Q.D est, sunt duo vires F & f in ratione inversâ perpendiculorum &c.



Simili modo constaret nostra enuncia=tionis veritas de duabus aliis viribus.

Conclusio 5.^a

Idem insumendum est tempus in decurrendâ Diagonali per vim compositam ac in perlustrando latere alterutro per vim alter=utram.

Demonstr. Cum actione virium con=junctarum Diagonalis describatur, hanc actionem vis utriusq optimè exhibet Dia=gonalis, aliundè verò singula vires per singula latera exprimuntur; Ergò tres illæ vires sunt tribus lineis proportionatæ.

74. Porrò quoties sunt vires ut spatia confecta, tunc datur æqualitas temporum. Tunc enim $F : f :: S : s$, seu $MU : mu :: S : s$; sed ob molem unicam $M = m$; Ergo $U : u :: S : s$; adeòque $SU = su$. Jam verò ex theoriâ motus æquabi=lis $sTU = Stu$; Ergo $T = t$.

Problema 1.^m

Datis vi F juxta directionem AB, & vi f juxta directionem AD, datâ etiam basi BD anguli directionum, invenire lineam AC vi compositâ decurrendam à corpore?

Solvit.^r Sit $BD = b$; sit $AC = x$.

In quovis parallelogrammo summa quadratorum utriusque diagonalis æqualis est summæ quadra=torum quatuor laterum, ut demonstratum est in elementis Geometriæ. Quoniam igitur lateribus vires exprimuntur erit $2F^2 + 2f^2 = b^2 + x^2$; unde facilè sequitur $x = \sqrt{2F^2 + 2f^2 - b^2}$.

Sit V: G: $F = AB$, erit $x = AC = \sqrt{200 + 50 - 169} = \sqrt{81} = 9$.

Problema 2.^dum

Datis vi compositâ R simul & alterâ virium componentium V: G: f, datâque basi $BD = b$ anguli directionum, invenire vim alteram F?

Solvitur. Est $2F^2 + 2f^2 = R^2 + b^2$; undè se=
=quitur $F = \sqrt{\frac{R^2 + b^2 - 2f^2}{2}}$. Sit V: G: $R = AC = 9$;
$b = BD = 13$, $f = AB = 5$; tunc erit $F = AB =$
$= \sqrt{\frac{81 + 160 - 50}{2}} = \sqrt{95\frac{1}{2}} = 47\frac{3}{4}$ ———

Scholium 1.m

Si non daretur basis anguli directionum, sed angulus ipse cognitus fingeretur, tunc problematis utriusque solutio esset ex Corol=
=lariis 4to repetenda Pag. 72. ——

Scholium 2.m

Ad theoriam motûs compositi pertinet corporum descensus juxta planum incli=
=natum, pertinent mechanicæ & æquilibrii leges; pertinet demum motus omnis curvi=
=lineus; De triplici illo motûs impediti genere tum disputabimus, cùm leges corporum sese collidentium exposue=
=rimus.

Paragraphus 2dus.

De Corporum conflictu.

Corpora quae inter se colliduntur, aut sunt dura, vel elastica; mollia consulto omitti=mus; propterea quod quae istius sunt generis, ad dura revocari possunt quoad collisionis leges.

De Collisione corporum durorum.

Dura vocantur ea quae nullâ prorsus vi comprimi possunt, neque à pristinâ forma recedere. Undè patet in rerum naturâ, quae perfecte dura existimari queant, nulla esse. Ejusmodi tamen esse supponenda sunt ea, quorum leges mox tradi=turi sumus.

Conclusio 1a.

In conflictu durorum corporum eadem ante & post conflictum remanet summa & differentia motuum.

Probatur. Nam 1° si corpora feruntur ante ictum in eundem sensum, tunc motus a colliso acquisitus, ille est quem collidens amittet; Ergo manet eadem summa motuum.

2do. vero si adversis partibus corpora

sibi occurrant, tunc pares in utroque vires eliduntur; docet siquidem experientia motus oppositos & aequales in pugnâ evanescere. Eadem igitur ~~supererat~~ superest motuum differentia.

Corollarium.

Communis ergo est in corporibus post ictum velocitas; ac reipsâ quidem tamdiu collidens agit in collisum, quamdiu hoc re=sistit collidenti; atqui hoc tamdiu resistit quamdiu non habet parem cum collidente ve=locitatem. Ergo corpus collidens alterum vexat & sollicitat, donec mediam suo ve=locitatis partem illi impresserit. Ergo &c.

Est autem formula velocitatis com=munis, $c = \frac{MU \pm mu}{M+m}$.

Conclusio 2da.

Velocitas à collidente M deperdita est. $\frac{mU \pm mu}{M+m}$.

Demonst. Velocitas quam amisit M, est excessus primo suo velocitatis, su=pra velocitatem in ipso residuam. Ergo est $= U + c = U - \frac{MU \mp mu}{M+m} = \frac{mU \mp mu}{M+m}$.

Conclusio 3.ª

Velocitas a corpore colliso $\underline{m}$ acqui=
=sita est $= \frac{MU \mp mu}{M+m}$.

Demonstr. Sit celeritas acquisita
$= y$. 1.º Si corpora feruntur in eandem
partem, $c = y + u$.

2.º Si ante conflictum ex adverso in
se incurrerent, tunc $c = y - u$. Ergo in
utroque casu $c = y \pm u$. Adeoque $y = c \mp u$.
Substituendo, $y = \frac{MU \pm mu}{M+m} \times \mp u = \frac{MU \mp mu}{M+u}$.

Ex dictis facilè ~~deducuntur~~ deducuntur Regulæ se=
=quentes.

Regula 1.ª

Si $\underline{m}$ ante conflictum quiescit, tunc
velocitas utriusque corporis erit post ictum
$= \frac{MU}{M+m}$.

Regula 2.da

Si eandem in partem corpora moveantur ante
conflictum, ambo insistent posteà pristinis
directionibus, cum æquali velocitate, siquidem

uniuscujusque velocitas $= \frac{MU+mu}{M+m}$. ~

Regula 3.ª

Si ex adversis partibus incurrunt cum viribus æqualibus post conflictum quiescent. Tunc enim communis velocitas $= \frac{MU-mu}{M+m}$; sed ex hypothesi $MU=mu$; Ergo $\frac{MU-mu}{M+m}=0$.

Regula 4.ª

Si cum viribus inæqualibus ex opposito sibi occurrunt, ambo sequentur directionem fortioris cum celeritatibus æqualibus. Erunt quidem æquales celeritates, siquidem utraque est $= \frac{MU-mu}{M+m}$. Deinde $\frac{MU-mu}{M+m}$ erit positiva; siquidem $MU > mu$; Ergo ambo sequentur directionem fortioris. ~|~

De Collisione corporum elasticorum.

Elastica dicuntur ea, quæ percussa comprimuntur, externâ viz. superficie ad centrum accedente, compressa verò postmodùm restituuntur in priorem formam. Alia porrò sunt perfecte elastica, alia imperfecte.

Quo perfecte elastica sunt, intra idem tempus per qod compressa fuerunt, restituuntur, atque idcirco cum eâdem vi formam recuperont suam. Quo autem imperfectè, ea tardius restituuntur atq debilius qam compressa fueront. Nullum oio deprehensum est cor=pus perfectè elasticum. Dicemus tmn 1º de corporibus oio elasticis; tum verò ex istorum legibus explorotis & cognitis aliqam imperfectè elasticorum notitiam eruere conabimur.

De Conflictu Corporum perfectè elasticorum.

Conclusio 1.ª

Velocitas qam collidens M in conflictu amittit $= \frac{2mU \mp 2mu}{M+m}$.

Demonstr. Velocitas amissa à collidente dupla est velocitatis qam amisisset, si caruisset elaterio; namq elaterium ttm

velocitatis qantum collisio destruit; Atqi si $\underline{M}$ caruisset elaterio, tunc ejus velocitas amissa, fuisset $\frac{mU \mp mu}{M+m}$, ut constat ex Conclusione 2^{dâ}. Ergo ubi perfectum est elaterium, tunc velocitas amissa $= \frac{2mU \mp 2mu}{M+m}$.

Conclusio 2da.

Tota corporis $\underline{M}$ celeritas post ictum $= \frac{MU - mU \pm 2m\bar{u}}{M+m}$.

Demonstr. Velocitas corporis $\underline{M}$ post ictum erit excessus prioris velocitatis supra velocitatem amissam; Ergo velocitas qosita, est $= U - \left(\frac{2mU \mp 2mu}{M+m}\right) = \frac{MU - mU \pm 2mu}{M+m}$.

Conclusio 3^{a}

Velocitas qam acquirit $\underline{m} = \frac{2MU \mp 2Mu}{M+m}$.

Demonst. Elaterium corpori colliso tantam impertitur velocitatem, qantam col=lisio ipsa: Atqi illud qodcumq delet in collidente, transfert in collisum: Ergo velocitas ab isto acquisita, est dupla illius qam sine elaterio comparasset: Atqi si $\underline{m}$ elaterio caruisset, ejus velocitas acqui=

=sita, fuisset $= \frac{MU \mp mu}{M+m}$. Ergo in casu elaterii, velocitas acquisita, erit $= \frac{2MU \mp 2Mu}{M+m}$.

Conclusio 4.a

Tota corporis m post ictum velocitas $= \frac{2MU \mp Mu \pm mu}{M+m}$.

Demonstr. 1.° si corpora motus habeant conspirantes ante conflictum, tunc m præter priorem suam velocitatem acqisitâ etiam in conflictu velocitate donabitur, tota igitur ipsius velocitas erit $= \frac{2MU \mp 2Mu}{M+m}$ $+ u$. Sin contrarii sint motus, tum o(mn)is velocitas corporis m erit excessus veloci=tatis acquisitæ supra velocitatem ipsi ante conflictum propriam. Erit ergo ejus velocitas $= \frac{2MU \mp 2Mu}{M+m} - u$. Itaq(ue) in utroq(ue) casu velocitas acqisita $= \frac{2MU \mp 2Mu}{M+m} \pm u =$ $= \frac{2MU \mp Mu \pm mu}{M+m}$.

Scholium.

Hæc generalia sunt collisionis corporum elasticorum principia, et q(ui)bus deduci possunt tum directiones tum velocitates singulis in cor=poribus post absolutam collisionem futuræ.

De Conflictu Corporum imperfectè elasticorum.

Problema 1.^m

Invenire velocitatem a corpore M in conflictu amissam? ———

Solvit.^r Solâ compressione amittitur velocitas, quæ sit $= \frac{mU \mp mu}{M+m}$. Restitutione autem amittitur velocitas, quæ sic detegi potest.

Sit ratio vis comprimentis ad vim res=tituentem $= \frac{q}{p}$; erit $p : q :: \frac{mU \mp mu}{M+m} : \frac{q}{p} \times \frac{mU \mp mu}{M+m}$.

Problema 2.^dum

Invenire totam velocitatem corporis M post conflictum? ———

Solvit.^r Tota corporis M velocitas post ictum est ejus velocitas primitiva post subductam velocitatem amissam. Ergo

est $= U - \frac{mU \mp mu}{M+m} - \frac{q}{p}\left(\frac{mU \mp mu}{M+m}\right)$ seu

$I = \frac{p \times MU - q \times mU \pm (q+p)mu}{p(M+m)}$.

Sit V: G: vis restitutionis ad vim compressionis :: 2 : 3; seu $\frac{q}{p} = \frac{2}{3}$; tunc erit

$I = \frac{3MU - 2mU \pm 5mu}{3M+3m}$, ut experimento invenit Newtonus.

Problema 3.^{m}

Invenire velocitatem in conflictu acquisitam a corpore colliso m?

Solvit.^{r} 1.° Compressione solâ corpus m acquirit velocitatem, quae sit $= \frac{MU \mp Mu}{M+m}$, ut antea dictum est. 2.° Velocitas elateris acquisita sic detegi potest: sit vis comprimentis ad restitutionem ratio $= \frac{q}{p}$; jam erit $p : q :: \frac{MU \mp Mu}{M+m} : \frac{p}{q} \times \frac{MU \mp Mu}{M+m}$. Ergo acquisita ob vim utramque velocitas erit $= \frac{MU \mp Mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{MU \mp Mu}{M+m}$; seu velocitas acquisita $= \frac{p+q}{p} \times \frac{MU \mp Mu}{M+m}$.

Problema 4.^m

Invenire totam velocitatem corporis m post conflictum? ——

Solvit.^r 1°. Si eundem in sensum corpora moventur ante ictum, tunc tota corporis m velocitas post ictum erit summa velocitatum ejus primitivæ & acquisitæ. Ergo ea est $= \frac{p+q}{p} \times \frac{MU - Mu}{M+m} + u$. ——

2do. Si adversis e partibus incurrunt, tunc celeritas corporis m post conflictum erit recessus velocitatis ejus acquisitæ supra primitivam; Ergo erit tunc velocitas quæsita $= \frac{p+q}{p} \times \frac{MU + Mu}{M+m} - u$; itaq corporis m velocitas post conflictum in utroque casu erit $= \frac{p+q}{p} \times \frac{MU + mu}{M+m} \pm u$; seu = ——

$$— = \frac{p+q \times (MU \mp Mu) \pm p(Mu - mu)}{p(M+m)}.$$

Scholium.

In corporibus collidente & colliso ela=
=terium prorsus æquale hactenus supposui=
=mus; si verò inæquale foret utriusque
corporis elaterium, tunc varii collisionis
effectus difficillimè possent æstimari.

Hac enim in re tentata fuerunt aliquot
experimenta; neque Algebræ & ratiocinii
ope quidquam assequi potuerunt Geo=
=metræ. ——————————

Superest ut dicamus aliquid de motu
reflexo, qui tantùm in corporibus elasticis
locum habet. ——————————

Conclusio.

Si corpus elasticum obliquè incurrit in
planum; tunc angulus reflexionis æquatur
angulo incidentiæ. ——————

Demonstr. Cum corpus obliquè in=
=currit in planum, vis ejus tota resolvi=
=tur in duos nisus, perpendicularem &
parallelum. Porrò nisus perpendicularis

collisione primum elīditur; deindè verò per elaterium restituitur; nisus autem pa=
=rallelus totò conflictûs tempore persevèrat. Itaq post conflictum corpus iterum versatur inter duos nisus, parallelum & perpendicula=
=rem; Ergo Diagonalem his viribus super=
=structam percurrere debet. Jam verò Diagonalis illa eundem cum plano seu vi parallelâ angulum facit ac vis inci=
=dentiæ: siquidem eorum nisuum direc=
=tiones ante & post conflictum eædem sunt; Ergo angulus reflexionis æquatur angulo incidentiæ. Q. E. D.

Scholium.

Quod si ambo corpora prorsus elastica sunt, punctum reflexionis o erit idem ac punctum incidentiæ. Toto enim compres=
=sionis ac restitutionis tempore nisus plano parallelus perseverat, & corpus juxta superficiem plani aliquatenus progredi=
=tur. Si verò corpora non sunt prorsus elastica; neque tunc ambo anguli per=
=fectè æquantur; siquidem nisus perpendicularis non perfectè restituitur.

Problema.

Invenire plani punctum obliquè feriendum, ut corpus in locum propositum L reflectatur?

Solvitr. Sit distantia puncti G a plano = DG = a; distantia puncti L = b; sit GI = e? Quoritur distantia x puncti feriendi C à puncto G. Est primùm CI = e − x; jam verò ob similia triangula CDG, CIL; DG : IL :: CG : CI, seu $a : b :: x : e-x$. Unde $ax + bx = ae$; adèoque $x = \frac{ae}{a+b}$ & $e - x = \frac{be}{a+b}$.

D, L, G, C, I.

Paragraphus 3.us

De

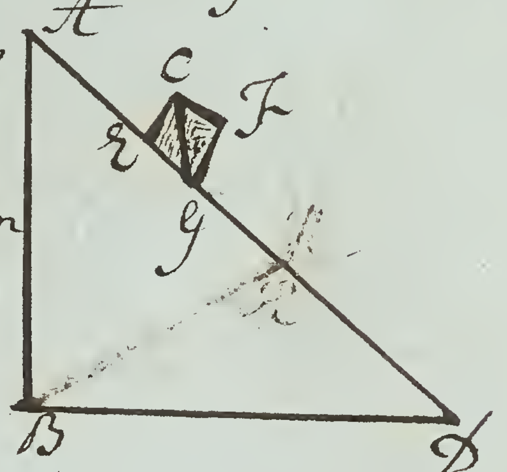
Corporum descensu ascensuve juxta planum inclinatum.

Dum juxta planum inclinatum corpora moventur, tum impeditur & ex parte infringitur actio gravitatis. Porrò gravitas sic impedita solet relativa appellari. Absoluta vocatur ea, quâ corpus ad lineam liberè decidit.

Problema 1.m

In descensu juxta planum inclinatum invenire rationem gravitatis absolutæ ad relativam?

Solvitr. Sit gravitas absoluta = CG = F: vis illa, quoniam est plano obliqua, duos habet nisus, perpendicularem CE, & parallelum CF; qui solus promovet corpus juxta planum, alter siquidem a plano eliditur. Ergo CF exprimit gravitatem relativam. Sit hoc = R. Erit igitur F : R :: CG : CF; sed ob triangula similia ABD, CFG; habetur AD : AB :: CG : CF. Ergo F : R :: AD : AB.



Hinc oritur illud Theorema: Gravitas absoluta est ad relativam ut longitudo plani ad ipsius altitudinem; seu F:R::L:A.

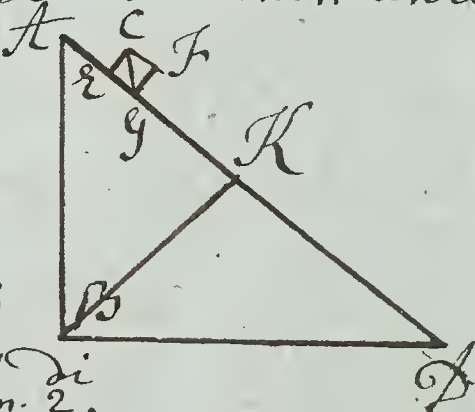
Aut etiam Est gravitas absoluta ad relativam ut sinus totus ad sinum an=guli ADB inclinationis plani; seu F : R :: Sinus totus : Sinus inclinationis.

Hinc gravitas absoluta semper major est gravitate relativâ. Est enim semper Sinus totus > Sinu inclinationis.

Corollarium 1.m

In planis ejusdem longitudinis & diversæ altitudinis, sunt gravitates re=lativæ ut planorum altitudines, proinde ut sinus angulorum inclinationis.

Demonst.r Sit longitudo communis



= L, est in priori plano
F : R :: L : A. In altero
F : r :: L : a; Ergo R : r :: A : a;
Seu R : r :: Sin. inclin. 1mi : Sin. inclin. 2di.

Hinc patet crescere vel minui gravitatem relativam quoties augetur vel minuitur angulus inclinationis; porro accuratè notandum est eandem non esse angulo=rum atque sinuum rationem, ac con=sequenter gravitatem relativam non crescere vel minui juxta ratio=nem angulorum inclinationis.

Corollarium 2^dum.

In descensu per longitudinem plani inclinati motus æquabiliter acceleratur.

Demonstr. Nam ex Problemate 1° F:R :: L:A. Ergo constans est ratio gra=
=vitatis relativæ ad absolutam: Atqui motus per gravitatem absolutam æqua=
=biliter acceleratur. Ergo et per gravita=
=tem relativam.

Corollarium 2^dum.

Æquatio gravitatis relativæ est

$$R = \frac{A}{L} F = \frac{\text{Sinus inclinationis}}{\text{Sinus totus}} F.$$

Hinc patet si spatia notata in tabulâ superiori Pag. 65 de gravium descensu ducantur singula in $\frac{A}{L}$, tunc singulis ~~punctis~~ productis expressum iri spatia per tempus idem in plano inclinato confecta.

Corollarium 4.^{m}

Si angulus inclinaonis plani = 45°, tunc $F : R :: \sqrt{2} : 1$.

Nam ex Problemate 1° $F : R :: AD : AB$; cùm verò angulus inclinationis plani = 45$^{deg.}$, tunc $AD : AB :: \sqrt{2} : 1$. Ergo &c.

Hinc patet 1° surdam esse aliqdo raonem gravitatis absolutæ ad relativam: 2.do in eâdem hypothesi hujus æquationem esse $R = \frac{1}{\sqrt{2}} F$, esse etiam ferè $F : R :: 7 : 5$.

Corollarium 5.^{m}

Si ex puncto infimo altitudinis erigatur Normalis BK, tunc gravitas absoluta est ad relativam ut altitudo AB ad partem AK superiorem plani. Est enim ex Problemate 1.° $F : R :: AD : AB$; sed ob triangulum rectan=gulum $AD : AB :: AB : AK$ Ergo $F : R :: AB : AK$.

Problema 2.^{dum}

Definire partem longitudinis decurren=dam intra tempus idem ac solidam alti=tudinem?

Solutio. Sit pars altitudinis posita $=x$. Sunt gravitates ut spatia per tempus idem confecta. Ergo $F:R::AB:x$. Ex Problemate autem 1° $F:R::AD:AB$; Ergo $AB:x::AD:AB$, adeoq $x=\frac{AB^2}{AD}$; porrò $\frac{AB^2}{AD}=AK$; Ergo AK est spatium eodem tempore decurrendum ac altitudo. ——

Corollarium 1m.

In circulo chordae ex parte supremâ Diametri ductae eodem tempore ac diameter decurruntur, seu isocronia sunt. ——

Corollarium 2dum.

Velocitas acquisita in parte longitudinis per totum lapsûs verticalis tempus decurrenda, est fractio $\frac{A}{L}$ celeritatis in descensu verticali comparatae, seu $u=\frac{A}{L}U$.

Nam ex Problemate 2do eodem tempore decurruntur AB & AK; Ergo $U:u::AB:AK$. Sed ob normalem BK est $AD:AB::AB:AK$. Ergo $U:u::AD:AB$; seu $U:u::L:A$; Itaq $u=\frac{A}{L}U$. ——

Hinc quamdiu tempora aequantur, aequales possunt acquiri per lapsus obliquum & verticalem celeritates. ——

Corollarium 3^m.

Æquantur celeritates in fine lapsuum verti=
=calis & obliqui. ——

Sit enim parta in fine lapsûs obliqui celeritas $= u'$. ——

Propter accelerationem in toto descensu ob=
=liquo æquabilem, erit, $u^2 : u'^2 :: AK : AD$; sed propter normalem BK erit $AK : AB :: AB : AD$; adeoq $AK : AD :: \overline{AK}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2$. Ergo $u^2 : u'^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2$, seu $u : u' :: AB : AD$. ——

Erat autem ex Corollario 2do. $u : U :: AB : AD$; Ergo $u' = U$. Hinc sequitur celeritates per plana ejusdem altitudinis sub quocumq angulo in=clinata esse prorsus æquales; siqdm singulæ adæquant celeritatem ex communi altitudine comparatam. —

Problema 3^m.

Invenire temporum rationem in lapsibus obliquo & verticali? ——

Solutr. Cùm in utroq lapsu seorsim motus æquabiliter acceleretur, erit in lapsu verticali $t = \frac{2A}{u}$; ——

In lapsu autem obliquo $T = \frac{2L}{u'}$; Sed ex Corollario 3° Problematis 2^{di} $U = u'$; Ergo $t : T :: A : L$ ——

Corollarium 1^m.

Est quoq t : T :: Sinus incli(nati)onis : Sinus totus.

Corollarium 2^dum.

Æquatio temporis in decurrendâ plani longitudine insumendi est $T = \frac{L}{A} t$. Hinc datâ ratione longitudinis ad altitudinem, facile detegitur tempus in descensu obliquo insumendum. Invenitur v. g. si longitudo plani sit dupla altitudinis, fore $T = 2t$. ——

Corollarium 3^m.

Cùm in descensu obliquo plus temporis quàm in verticali insumatur, (est enim $L > A$, adeòq $T > t$) hinc patet quàm meritò Gallilaeus experimenta sua sumpserit in planis inclinatis ad explorandas gravitatis leges. In his enim tardior est descensus, quapropter faciliùs possunt temporum discrimina observari ——

Corollarium 4^m.

In planis æquialtis tempora descensuum sunt ut longitudines. Ex Problemate 3º. enim oportet esse $t : T :: A : L$. Altero in plano $t : T' :: A : L'$. Ergo $T : T' :: L : L'$. ——

Problema 4^m.

Invenire rationem temporum per series plano=
=rum similium? ———

Solvit^r. Sit prior series planorum a, b, d, &c; altera A, B, D, &c. Cum sit per plana inclinata aequabilis acceleratio, erit tempus per a ad tempus per A :: $\sqrt{a} : \sqrt{A}$. Similiter tempus per b erit ad tempus per B :: $\sqrt{b} : \sqrt{B}$; &c. Sed ob simi=
=litudinem planorum a : A :: b : B :: d : D :: &c.

Ergo a + b + d + &c : A + B + D + &c :: a : A :: &c. ———

Adeoq $\sqrt{a+b+d+\&c} : \sqrt{A+B+D+\&c} :: \sqrt{a} : \sqrt{A} :: \&c$

Itaq tempus per seriem priorem est ad tempus per alteram :: $\sqrt{a} : \sqrt{A}$, &c; seu tempora per ambas series sunt ut tempora per singula serierum plana homologa ———

Problema 5^m.

Invenire vim corpori opponendam, quae obstare possit, ne corpus idem juxta pla=
=num inclinatum descendat? ———

Solvit^r. Totus corporis nisus ad des=
=censum est gravitas relativa; Ergo vis oppo=
=sita gravitatem relativam aequare debet. Sit itaq vis opposita = U; erit U = R. Sed ex Problemate 1° $R = \frac{A}{L} F$; Ergo $U = \frac{A}{L} F = \frac{\text{Sinus inclinationis}}{\text{Sinus totus}} F$. ———

Scholium 1.^m

Si corpus cum velocitate inter descensum acquisitâ sursum regrederetur, tum motu ascenderet æquabiliter retardato. Quapropter leges ascensûs verticalis + obliqui hic exponere nihil attinet. Prodeunt enim istæ leges, si contrario sensu accipiantur ea, quæ de obliquo + verticali lapsu hactenus exposita sunt. —

Scholium 2.^dum

Si infinitissima sint plana singula ejusdem seriei, tunc eorum summa curvam efficiet, unde exurget motus curvilineus. Hic itaque oportunum est de isto genere motûs disserere. —

Paragraphus 4.us

De

Motu curvilineo.

Motus curvilineus esse non potest, nisi du=plici agitetur vi, alterâ quidem juxta lineam rectam corpus propellente, atque à definito quodam spatii puncto semper removente; alterâ vero, quæ corpus in hoc idem punctum semper conetur detrudere, aut saltem prope illud punctum retinere —

Quod si corpus vi projectionis animatum, non vi proprie dicta versus punctum aliquod immobile trudatur, sed potius quasi affixum aut religatum fune retineatur, tum motus est oscillatorius.

Duplex igitur genus est motus curvilinei; de priori Mathem:+ Lect: consulemus. Alterum spectabimus tantummodo in Sectionibus Conicis. Supponemus etiam primam Kepleri legem, quae statuit radium vectorem curvae, in cujus foco centrum virium constitutum sit, describere areas temporibus proportionatas; quae enunciatio apud eundem Auctorem+ Pag: 354 tum Geometrice tum Calculo integrali est demonstrata.

(1) Hinc porro statim sequitur velocitatem in variis curvae descriptae punctis, esse inverse ut perpendiculares, quae ducerentur a centro virium in tangentes ad eadem puncta. Dicendo igitur q unam ex illis perpendicularibus velocitatum u, erit semper in omni curva $u = \frac{1}{q}$.

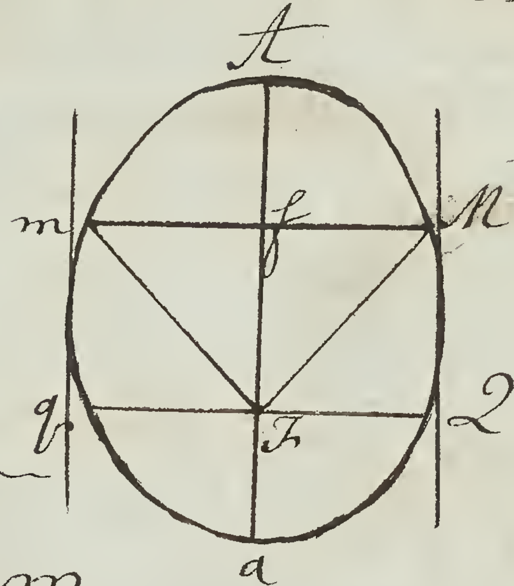
Cumque erit radius vector, seu ipsa distantia corporis a foco perpendicularis in tangentem, d, tunc dabitur $u = \frac{1}{d}$: Et quo sequitur velocitatem in circulo esse constantem, hoc est, in singulis punctis aequalem.

(2) In una, eademque Ellypsi, velocitates, quas habet corpus in iis punctis, ubi est eadem

+ Leçons Elementaires de Mathématiques &c; Par M. l'Abbé Lingois. A Paris. A.D: 1779.

curvæ inflexio, rationem inversam radiorum vectorum obtinent.

Facile enim ostenditur similia esse triangula FM2, Fmq, ac conse=quenter esse MF: mF :: F2 : Fq; seu D : d :: 2 : q. Ergo &c.



Corollarium.

Si duo corpora in eâdem Ellypsi mota, cum ad puncta similiter inflexa pervenient, subitò conversa ~~—~~ in secundum Ellypsis focum rue=rent, utrumque cum suâ velocitate acquisitâ, confecto intra idem tempus itinere, in ipso foco sibi occurrerent. Tunc viz. velocitates haberent spatiis describendis proportionatas.

(3.) In quâlibet Sectione conicâ instantanea velocitas $=\sqrt{px}$, (modò p & x non solum ad Axem, sed etiam ad diametrum referantur).

Demonstr. Velocitas hæc per arcum infi=nitissimum exhibetur tempore dato descrip=tum; arcus autem iste ab ipsâ Ordinatâ nequaquam distinguitur; Ergo $u=y$: Atqui generatim est: $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$;

Proindè cum $x=\frac{1}{\infty}$; $y^2=px$;

 quapropter substituendo u in locum y, est $u = \sqrt{px}$.

(4) Porrò hinc sequitur 1° vim centripetam in circulo esse constantem.

Tunc enim x exprimit vim gravitatis di=rectam in centrum ipsius circuli. Sit ista vis = F; igitur $u = \sqrt{pF}$;

Proindè $F = \frac{u^2}{p} = \frac{u^2}{2a}$.

Velocitas autem in circulo est invariabilis. Ergo &c.

(5) 2do In duobus circulis

$$F : f :: \frac{U^2}{A} : \frac{u^2}{a};$$

Quæ proportio variè modificata, alias dabit bene multas.

(6) E: G: Scimus in motu æquabili esse $u = \frac{s}{t}$.

Itaq: $F : f :: \frac{S^2}{AT^2} : \frac{s^2}{at^2}$.

Si autem S & s sint duæ circumferentiæ, tunc est $S : s :: A : a$;

Quamobrèm erit $F : f :: \frac{A}{T^2} : \frac{a}{t^2}$;

Itaq: in diversis circulis vires centripetæ sunt directè ut radii, inversè ut quadrata temporum periodicorum.

(7) Nunc ponamus id quod ex observatione constat, quodque in posterum probabitur, in duobus circulis diversis gravitates esse inverse ut quadrata distantiarum, seu radiorum! Ultima proportio tum fiet

$$\frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: \frac{A}{T^2} : \frac{a}{t^2};$$

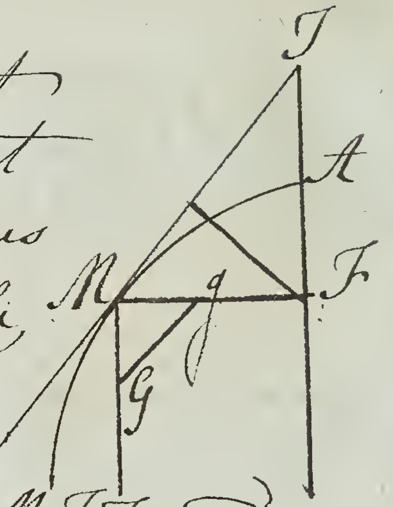
Ergo — $T^2 : t^2 :: A^3 : a^3$; —— hoc est, quadrata temporum periodicorum sunt inter se ut cubi distantiarum. Et hoc qdm est secunda Kepleri lex, qam suis observationibus detexit laboriosus inprimis Astronomus ——

(8) Hac ultimâ servatâ hypothesi facillimâ operâ demonstratur Velocitates esse in diversis circulis inverse ut quadratas distantiarum radices. Est enim $F : f$ seu $\frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: \frac{U^2}{A} : \frac{u^2}{a}$.
Unde sequitur $\frac{U^2}{A} = \frac{u^2}{a}$;

Ergo — $U : u :: \frac{1}{\sqrt{A}} : \frac{1}{\sqrt{a}}$ ——

(9) Jam vero in parabolâ, qemadmodum in circulo, x representat vim gravitatis directam ad focum ——

102. <u>Demonstr.</u> Radius enim vector, & diameter cum tangente æquales faciunt angulos: Ergo in triangulo MqG, cujus hypothenusa qG tangenti est parallela, angulus q = angulum G; est igitur triangulum isocele: Aliunde idem triangulum simile est triangulo MIF, quod isocele vult esse naturâ parabolæ; Est ergo $MG = Mq$, seu $x = F$; Ergo $u^2 = pF$; sed prætereà $u = \frac{1}{q}$, notumq est in parabolâ hanc perpendicularem q crescere ut radicem quadratam radii vectoris, seu ut $\sqrt{D}$. Itaq $u = \frac{1}{\sqrt{D}}$;



Ex quo obiter regula ista deducitur: <u>in diversis ejusdem parabolæ punctis velocitatem esse inverse ut radicem quadratam radii vectoris.</u> ——

(10.) Nunc autem habemus u^2 dupliciter expressum, unde oritur æquatio $\frac{1}{D} = 4DF$, est enim parameter $p = 4D$; Ergo neglectâ quantitate constante 4, $F = \frac{1}{D^2}$.

Hoc est <u>in unâ eademq parabolâ vis centripeta sequitur rationem inversam quadrati radii vectoris</u>, quod qdm non solum parabolæ, verùm etiam Ellypsi & hyperbolæ convenit, quemadmodum nunc demonstraturi sumus. ——

(11) Cum enim sit semper $u^2=px$, si appellentur g, h duo diametri Mm, Nn, substituendo in equatione valorem p, fiet

$$u^2 = \frac{2x\,h^2}{g}.$$

Jam ex triangulis similibus MGg, MCE, habetur $MG : Mg :: MC : ME$, seu $x : F :: g : a$;

Ergo $g = \frac{a\,x}{F}$;

Unde evadit $u^2 = \frac{2Fh^2}{a} = \frac{1}{q^2}$.

Sed praeterea ex triangulis MDE, MFT, emergit altera proportio $MD = \frac{ab}{h} : a :: q : d$;

proinde $q^2 = \frac{b^2 d^2}{h^2}$;

Ergo $\frac{2Fh^2}{a} = \frac{h^2}{b^2 d^2}$;

Unde, neglectis constantibus, $F = \frac{1}{d^2}$.

Quae demonstratio facilè ad hyperbolam applicari potest.

Praeterea observare licet hyperbolam inter et Ellypsim nihil discriminis, praeter signa $+$ et $-$. Similiter etiam nihil aliud est Parabola nisi Ellypsis, in quâ fingatur Axis major $= \infty$. Quo qdm d px observatio ostendit, harum rerum ratione habitâ, ut par

erit, quod de Ellypsi dictum & assertum fuerit, idem quoq ad Hyperbolam & Parabolam referri posse.

(12.) In hypothesi quod gravitas sequatur ubique rationem inversam quadrati distantiarum, si duæ curvæ inter se comparentur, invenientur areæ ex utraq parte, intra datum tempus, a radiis vectore descriptæ, esse directe ut radices quadratæ parametrorum.

Demonstr. Fingatur corpus utrobiq situm in ipsâ extremitate Axis majoris. Area illic a radio vectore descripta, erit $= \partial \times u = \partial \sqrt{px}$. Sed ibidem est $x = F$, & ex hypothesi $F = \frac{1}{\partial 2}$; ergo posita Area $= \partial \sqrt{\frac{p}{\partial 2}} = \sqrt{p}$.

Atqui in unâ eademq curvâ æquales sunt oes Areæ temporibus descriptæ æqualibus. Ex eo igitur quod una $= \sqrt{p}$, sequitur talem quoq esse valorem cæterarum oium tempore infinitissimo descriptarum. Ergo &c.

(13) Sequitur hinc 1º si conferatur velocitas quæ in duabus Sectionibus conicis exercetur, esse $u = \frac{\sqrt{p}}{q}$.

Demonstr. Sit radius vector FL infinite

porum distans ab FM —— Si ex puncto L ducatur in FM perpendicularis LH, erit hoc semper $=\frac{\sqrt{p}}{d}$. Insuper similia triangula LHg, MFT, hanc proportionem dabunt, $u : \frac{\sqrt{p}}{d} :: d : q$; ——

Ergo —— $u = \frac{\sqrt{p}}{q}$. ——

Si $q = d$, ut contingit in extremitate Axis majoris, pluresque supponantur curvæ, quorum communis origo in illâ ipsâ extremitate sit, quæ communem etiam habeant focum, tunc erit

u ut $\sqrt{p}$. ——

(14.) Sequitur 2do in duabus Ellypsibus quadrata temporum periodicarum esse ut cubos majorum Axium. ——

Est enim tempus universum periodicum directè ut integra Ellypsis Area, inversè autem ut una Area à radio Vectore intra tempus datum, infinitissimumq, descripta. Porrò crescit Ellypsis tota, quemadmodum ab; siquidem ea æqualis est circulo, cujus radius foret $=\sqrt{ab}$. ——

Erit ergo $T : t :: \frac{AB}{\sqrt{P}} : \frac{ab}{\sqrt{p}}$; ——

seu substituendo valorem P, p, ——

Erit $T : t :: \frac{AB\sqrt{A}}{B\sqrt{2}} : \frac{ab\sqrt{a}}{b\sqrt{2}} :: A\sqrt{A} : a\sqrt{a}$;

Ergo $T^2 : t^2 :: A^3 : a^3$

(15) Si corpus quod moveretur in Parabolâ consideretur in extremitate Ordinato per focum transeuntis, tunc ipsius velocitas invenietur $= \frac{1}{\sqrt{a}}$. Nam in illo puncto perpendicularis $q = 2a$. Ergo $\frac{\sqrt{p}}{q}$, sive $u =$
$= \frac{\sqrt{4a}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.
Itaq si fingatur circulus cujus centrum sit focus ipse Parabolæ, & cujus radius sit a, velocitas corporis hunc circulum describentis, similis erit velocitati, quam corpus idem acquisiisset in extremitate Ordinato per focum transeuntis, ~~in~~ Parabolam describendo.

(16.) Tempora periodica corporum, q⁰ in duabus Ellipsibus revolvuntur, eandem rationem inter sese obtinent, ac si revolverentur in duobus Circulis, quorum essent radii A & a, cum mediis suis velocitatibus, hoc est, cum velocitatibus acquisitis in ipsâ extremitate Axis minoris.
Demonst. In extremitate enim Axis minoris $\frac{\sqrt{p}}{q}$ fit $= \frac{b\sqrt{\frac{2}{a}}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$. In circulo autem est tempus periodicum $t = \frac{s}{u} = \frac{s\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$.

erit ergo in duobus circulis $T:t::S\sqrt{A}:s\sqrt{a}$;
proindè cum sit $S:s::A:a$, erit

$$T^2:t^2::A^3:a^3;$$

Atqi in ipsis Ellypsibus est quoque

$$T^2:t^2::A^3:a^3;$$ Ergo &c.

(17.) Nunc verò id propositum sit, de=
=finire altitudinem, ex quâ oporteret corpus
quoddam decidere ad acquirendam veloci=
=tatem æqualem illi, quam habet in puncto
dato Curvæ à se descriptæ; posito insuper
quod truderetur per eandem actionem gra=
=vitatis, quâ in eodem puncto dato suæ
curvæ premitur.

Ut ea quæstio solvatur, sit altitudo quæ=
=sita $= z$. Velocitas in fine lapsûs com=
=parata, propter accelerationem motûs æqua=
=bilem, erit $= \frac{2z}{t} = \frac{2z}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}$.

Velocitas corporis instantanea, dum
partem suæ curvæ infinitissimam describit,
habenda est tanquam æquabilis; estq ut
spatium per tempus divisum. Spatium
autem est Ordinata $= \sqrt{px}$: tempus est ut
radix quadrata illius partis radii vec=
=toris, quæ vim centripetam repræsentat.

Ergo $u = \frac{\sqrt{px}}{\sqrt{F}} = 2\sqrt{z}$; ——

$4z = \frac{px}{F}$; ~ $z = \frac{px}{4F}$ ——

Jam verò in Circulo & Parabolâ est semper $x = F$; itaq pro his duabus curvis

$z = \frac{1}{4}p$. ——

In circulo $p = 2a$; Ergo iterum pro circulo $z = \frac{1}{2}a$. ——

In Parabolâ $p = 4a + 4x$ (si, inquam, x ad Axem referatur); igitur pro Parabolâ erit $z = a + x = \partial$! ——

In summitate Ellypsis & Hyperbolæ est etiam $x = F$. Igitur erga hæc puncta Ellypsis & Hyperbolæ est item $z = \frac{1}{4}p = \frac{b^2}{2a}$.

(18.) Sint plures Circuli, quorum radii sint varii radii vectores ejusdem Parabolæ, & quorum commune centrum in ipsius Parabolæ foco resideat. ——

Velocitas parabolica erit constanter ad velocitatem circularem $:: \sqrt{z'} : \sqrt{z}$ $:: \sqrt{\partial} : \sqrt{\frac{1}{2}\partial} :: \sqrt{2} : 1$ ——

Quod si nunc velocitatem, quo est in summitate Ellypsis vel Hyperbolæ, conferamus cum eâ, quæ locum haberet in circulo, cujus centrum esset in Foco, radius autem ipsa distantia foci ab extremitate Axis majoris, seu $= \partial$, inveniemus velocitatem ellypticam, sive hyperbolicam, esse ad velocitatem circularem :: $\sqrt{p'} : \sqrt{p}$.

Verum parameter in Ellypsi vel Hyperbolâ æqualis est duplo Ordinatæ per focum transeunti, id est $p' = 2y$;

Proindè $y^2 = \frac{p'^2}{4}$:

Atqui $y^2 = p'x \mp \frac{p'x^2}{2a}$

In facta autem hypothesi $x = \partial$;

Ergo $\frac{p'^2}{4} = p'\partial \mp \frac{p'\partial^2}{2a}$;

Ac consequenter $\sqrt{p'} = \sqrt{4\partial \mp \frac{4\partial^2}{2a}}$.

Porrò in circulo parameter duplo radio æqualis est:

Hic igitur $\sqrt{p} = \sqrt{2\partial}$.

Nunc itaq velocitas ellyptica vel hyperbolica in summo Axe est ad velocitatem circularem :: $\sqrt{4\partial \mp \frac{4\partial^2}{2a}} : \sqrt{2\partial}$.

Undè patet velocitatem ellypticam in extremo Axe, esse ad velocitatem circuli ad eandem distantiam sumpti in ratione

minori quam $\sqrt{2}:1$; hyperbolicam verò ibidem esse ad circulam in raone majori qàm $\sqrt{2}:1$.

Jam verò velocitatum ratio, quæ locum obtinet in summâ Ellypsi & in circulo, ō crescit cum corpus e summâ Ellypsi ad imam dilabitur; ista autem ratio in Hyperbolâ & Circulo, tum corpus e summâ Hyperbolâ recedit, nunquam minuitur. Quippe in Ellypsi & Hyperbolâ velocitas sequitur semper rationem inversam perpendicularium à foco in Tangentes ductorum; seu est semper in utrâq curvâ. Interea autem $u' = \frac{1}{q}$, in circulis, quorum radii sint ipsi radii vectores Ellypsis vel Hyperbolæ, est semper $u = \frac{1}{\sqrt{d}}$; Ergo $u : u' :: q : \sqrt{d}$;

Atqui demonstratur in Ellypsi q crescere in ratione minori quàm $\sqrt{d}$; in Hyperbolâ autem majora esse incrementa q qàm $\sqrt{d}$.

Ergo hoc tria statuenda sunt, 1.° in Parabolâ rationem velocitatis parabolicæ ad velocitatem circularem constan=

=ter esse $= \sqrt{2} : 1$.

2°. velocitatem ellypticam in oibus curvo punctis esse ad velocitatem cir=culare in ratione $< \sqrt{2} : 1$.

3°. deniq rationem, quo interest ve=locitatem inter hyperbolicam & cir=cularem in oibus punctis Hyperbolo esse $> \sqrt{2} : 1$.

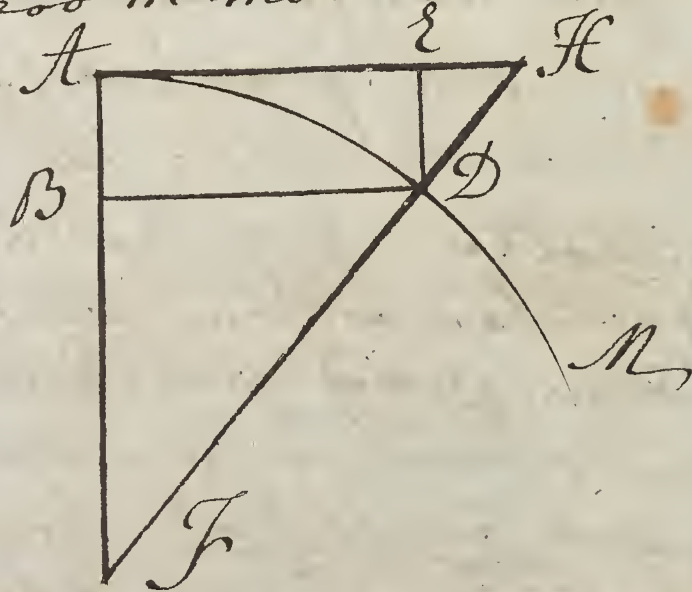
Scholium.

Velocitas, quâ corpus unumquemq arcum infinitissimum in quâlibet curvâ describit, æqualis est velo=citati, quâ tangentem ejusdem arcûs, quo cum arcu ipso confunditur, æqua=biliter describeret, hocque vis tangentialiss appellatur.

Gravitas autem quâ corpus truditur in centrum, quod per Sinum versum ejusdem arcûs infinitissimi expri=mitur, vis centripeta nuncupatur.

Sed proterea agnoscunt Physici aliam vim, quâ corpus directe nititur a centro recedere, quamq idcirco centrifugam vocant. Porro est hoc semper æqalis vi ipsi centripeta.

Nam manifestum est vim centrifugam esse nihil aliud, nisi conatum alterius vis tangentialis, quo fit ut corpus nequeat tan=genti insistere, nisi certâ quantitate intra datum tempus a centro removeatur. V: G: si corpus intra unum instans e puncto A, tangentem secutum, perveniret ad punctum H, minus accederet ad centrum quam si e puncto A perveniret ad punctum D, curvo insistendo, minus, inquam, tota quantitate DH. Est autem DH = DE, = AB, propter arcum infinitissimum AD. Igitur vis centrifuga, centripetæ æqualis ha=benda est; tantummodo opposita est vis utriusque directio. Ob hanc causam ambæ istæ vires, communi vocabulo centrales dicuntur, & eodem modo æstimantur.



Paragraphus 5us

De Æquilibrii Legibus.

Exposuimus hactenùs Elementa Dyna=
=mica, quæ est prima Pars Mechanicæ gene=
=ralis. ———

Mechanica viz. generatim tractat de mo=
=tuum & æquilibrii Legibus. Sed prior Pars,
quæ leges motuum erga corpora solida ex=
=ponit, Dynamica dicitur: altera quæ est
de Æquilibrio inter corpora solida, Sta=
=tica appellatur. Quæ duæ partes post=
=modùm refferuntur ad corpora fluida,
& eam ob causam altera Hydrodynamica,
altera autem Hydrostatica dicitur. ——

Nos autem, principia Staticæ, hoc est,
quæ ad Æquilibrium & ad Machinas per=
=tinent, cum in recenti Opere+ suprâdicti
Auctoris exposita habeamus, scripto
hîc tradere omittemus; statimq appel=
=lemus ad Hydrodynamica Elementa. ——

+ Vide notam Pag. 98. ——

Paragraphus 6ᵘˢ

De Legibus qbs temperatur motus corporum fluidorum.

Fluida sunt ea, quorum partes tenuissi=
=ma sunt, & talis figura, ut se invicem per
minimas superficies tangant; sic enim
fit, ut alia juxta alias lapsu facillime
moveantur, & totius corporis tenacitas sit
quam minima.

Motus fluidorum, non ut solidorum,
gignitur vel modificatur percussione atq
conflictu; verum ex sola pressione ori=
=tur. Quo qdm pressio qua ratione aesti=
=manda sit, nobis inquirendum venit;
tum de liquidorum effluxu, quae necessaria
scitu maxime sunt, brevissima
expositione comprehendemus.

Conclusio 1ᵃ

Liquores in tubis qbscumq stagnantes,
fundum premunt secundum rationem
compositam Basis & Altitudinis.

Probatr. 1.° Experimentis a Paschalio ten=tatis: Assumit ille plurimos ejusdem basis & altitudinis tubos, alios quidem prismaticos, alios pyramidales, vel amphoræ in speciem supernè desinentes, aut conum inverso vertice trunca=tum imitatos, alios spirales, &c æqualia deindè singulorum fundis aptavit Epistomia mobilia, quæ superstructa propè orificium superius trocleâ, appensisque ope fili ponderibus, sustentavit. Porrò experientia docuit eadem ubiq necessaria esse pondera, ut retinerentur Epistomia, ne viz. fluido pressa deorsum truderentur; docuit etiam experientia non interrumpi æquilibrium inter Epistomia & pondera, nisi vel basis tuborum vel altitudo mutaretur. Undè conclusum ab oibus pressionem liquidi cujuscumq in quolibet vasi exerceri in ratione compositâ Basis atq Altitudinis.

Probatr. 2.° Quemadmodum æstimatur generatim quantitas motûs ex mole in velocitatem ductâ, pptereà quòd eò plures sunt partes motæ, quò major est moles, eò vehementius autem singulæ moventur, quò major est corporis totius velocitas;

ita etiam pressio, quæ in fundum vasis exercetur, æstimari debet ex basi in altitudinem ductâ, modò sit eò major par=tium prementium numerus, quò major est basis, & premant singulæ eò vehementiùs quò major est altitudo: Atqui hoc duo vera sunt; ——

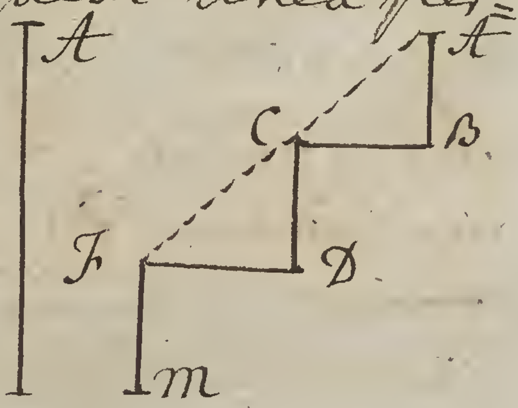
1.º q̄dm eò plures esse partes liquidi fundum prementes, hoc est, proxime in=cumbentes fundo, quò major est ipsius fundi superficies, seu quò basis est am=plior, ita perspicuum est, ut nullâ probatione indigeat: ——

2.do autem sat facilè ostenditur pres=sionem partium singularum fundo incumbentium, esse eò majorem, quò major est totius tubi altitudo, qalicumq tubus figurâ sit. Quod ut probetur, principii loco sumendum est o̲e̲s̲ fluidi quiescentis moliculas in eodem plano residentes, æqualiter premi & premere; cujus confirmatio in promptu est. Nisi enim o̲e̲s̲ æqualiter premerentur & premerent, moliculæ validius pressæ ad latera conarentur diffugere, ut pressi=oni se subducerent. Porrò reipsà sub=ducerent sese, & versus latera moverentur

proximas nempe moliculas comprimendo, quo, ut supponuntur minus presso, non valerent eorum actioni resistere, agi=tarentur itaq moliculo oes in eodem plano horizontali positto, donec eorum oium æqualis compressio fieret, sicq inter illas statueretur æquilibrium. Cum igitur aga=mus hic de fluido quiescente, patet as=sumptum principium extra oem dubi=tationem esse.

Jam igitur si una sit ex moliculis fundo impositis, qo premat in ratione altitudinis, eo ipso certum manebit oes qotqot in fundo residunt, premere in eadem ratione: Atqi erga unam moliculam res facile efficitur: Vel enim ea est tubi fi=gura, ut una ex infimis moliculis sus=tineat columnam fluidi rectam ex summo tubo ad basim usq pertinentem, vel talis est tubus, ut a basi superiori ad infe=riorem nulla pertineatt columna verti=calis, seu nulla duci queat linea per=pendicularis haud interrupta

Atqui in priori tubo molicula infima M premit in ratione altitudinis.



Illius enim pressio æqualis est ponderi, quo oneratur ipsa; pondus vero istud est ut numerus moliculorum, quas susti=
=nent; demum iste numerus est ut altitudo A M. Ergo pondus, quo one=
=ratur molicula M.

Proinde tota pressio, quam exercet in punctum basis sibi subditum, est ut eadem altitudo.

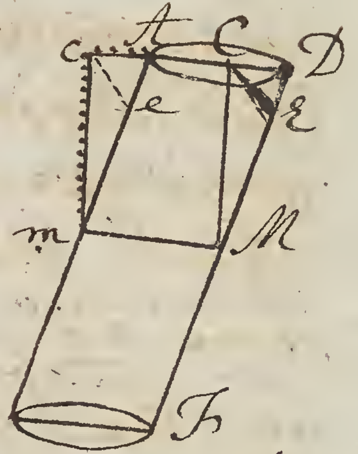
In altero autem tubo molicula item M premit ut pondus omne, quod sustinet; Atqui istud pondus et ipsâ tubi altitudine metiendum est. Principiò enim Molicula M sustinet pondus columnæ F M, cui subjicitur; sed columa istæc non tan=
=tum proprio pondere gravis est: nam et promisso lemmate omnes moliculæ in eodem plano horizontali positæ æqualiter premuntur & premunt: Ergo molicula F non minus ponderat quam molicula D; Atqi hæc premitur molicula columnâ C D. Molicula igitur F sustinet pondus istius columnæ.

Sed rursum proprio ponderi ad columnæ CD addendum est illud columnæ AB; siquidem molicula C non minus premitur quam B; ergo ut B ita etiam C sustinet totam vim columnæ AB.

Quamobrem vis tota columnarum omnium verticalium AB, CD, FM in unam moliculam infimam M transmittitur. Pressio igitur, quam ista molicula in punctum basis sibi subditum exercet, = AB + CD + FM, id est, integram tubi altitudinem. Ergo qualiscumque sit tubi figura vel forma, nulla est partium fundo incumbentium, quæ non premat secundum altitudinem totam. Ergo universa pressio, quæ exeritur in fundum, æqualis est producto basis per altitudinem.

Dices 1.° Sit tubus cylindricus rectus, et alter cylindricus inclinatus, quorum sit eadem basis atque altitudo. Videtur eandem pressionem in fundum esse non posse. In utroque enim tubo æqualis continetur fluidi quantitas, sed in inclinato tubo partim sustinetur liquor inferiori latere; Ergo non totus ad premendum fundum impenditur.

In ultimo enthymate nego secundam partem antecedentis & conse=quentiam



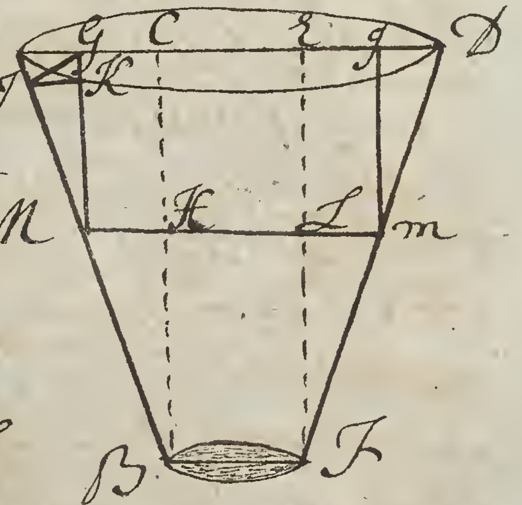
Latus enim inferius DF obliquè premitur per singulas fluidi columnas, quas susti=net; quarum instar sit columna CM. Decom=ponitur ista in duos nisus, alterum lateri perpendicularem CE, alterum parallelum EM. latus autem o premitur nisu pa=rallelo, sed solummodò perpendiculari CE. Verum omnes moliculæ fluidi constitutæ in plano Mm æquè comprimuntur ac molicula ipsa M. Fluida autem com=pressa, dum compressioni se conantur subducere, conatus diffugiendi in omnem partem æqualiter exerunt, & quidem conatus æquales vi comprimenti, quemadmodum & natura fluidorum & ipsa experientia comprobat. Ergo molicula m abire nititur cum vi = CM = cm, atque abiret reipsa, si daretur illi exitus in puncto m, resileretque fluidum ex m in c. Sed cum latus superius o sit apertum in puncto m, frangitur conatus omnis

moliculo m. Nihilominus hæc latus AB sursùm impellit per vim obliquam m c, quo ut MC, decomponitur in duos nisus, parallelum m e & perpendicularem c e, qui solus agit in latus AB.

Jam verò oppositi sunt nisus CE & c e, utpote quorum alter agat deorsum, alter verò sursum. Praeterea æquales sunt ambo; namq evidens est æqualia esse triangula, m c e, MCE.

Ergo reipsà tubus inclinatus nec sursùm nec deorsùm agitur à fluido intus premente, totaq pressio in basim BF transmittitur. Ergo &c.

Inst. Sit tubus alter conicus inverso vertice truncatus. Jam sic datur argumentari: Latus AB magis sustinet pressionem liquidi incumbentis, quàm latus inferius DF in tubo inclinato. Ergo



pressio tota liquidi in parte ABC contenti, in basim BF transmittitur. Idem dici poterit de pressione liquidi contenti in parte EFD. Insuper evidens est basim BF premi per fluidum

 totum CBFE. Ergo si vera est ultima res=
=ponsio fatendum esse videtur basim tubi
conici inversi premi in ratione quantitatis
fluidi, quod continetur in tubo, proindè
multò magis qam basim tubi cylindrici
ejusdem basis & altitudinis.

Nego 1.um Ant: & Consq. Nam 1.º unaquoq;
molicula lateri incumbens premitur et
premit secundum pondus totius columnæ,
quam sustinet; atq; ita pressa in moliculas
oes vicinas abeundi ~~tunc~~ conatum exerit. Sed sic
facere o potest, ut augeatur istarum pres=
=sio; utpote quæ partes fluidi columnas
sibi impositas sustineant; unde fit ut
moliculæ V: G: HL columnis CH & EL subjectæ
æquè premuntur ac M & m; idemq dici potest
de omnibus quæ sunt in eodem plano MH
Lm. Cum igitur ita sit fluidorum pro=
=prietas, ut vim pressione acceptam quâ=
=cumq; licet dispergere & applicare conen=
=tur, oes moliculæ huic plano MHLm
impositæ nituntur adversus se invicem
cum viribus æqualibus. Ergo columnarum
GM & gm conatus ois ad latera est
irritus; sola ut puncta quibus inni=
=tuntur, premunt. Porrò idem ad cæteras
omnes columnas, quæ vasis lateribus
innixæ recumbunt, referendum est.

Totae igitur quantitates fluidi ABC, EFD tubi parietibus sustinentur, nihil=
=ominus fundo BF injiciunt. —

Jam vero quando agitur de tubo inclinato; quod de moliculis plani MHLm mox diximus; eadem dici ne=
=queunt de iis quae jacent in plano Mm (Fig. proc:) harum quippe in plano inclinato, vires à columnis superpo=
=sitis accepto o sese mutuo elidunt.

2.do Si decomponantur singulae columnae leteribus innixae, facile deprehendetur nul=
=lam esse ex omnibus, quae columnarum mediarum pressionem adaugeat in fundum. Nam V: G: GM respectu lateris AB duos habet nisus, perpendicularem GI, qui solus lateri opponitur, & parallelum IM, qui agit obliquè in columnas medias. Proinde iste nisus IM iterum in duos decompo=
=nitur, alterum IK columnis mediis per=
=pendicularem, alterum KM, qui in ipsum latus AB refunditur. Jam vero conatus IK ad premendum fundum nequaquam impenditur; tum quia est fundo paral=
=lelus, tum quia per columnarum mediarum

reactionem infringitur. De conatu vero KM idem quod de GM dicendum. Cum enim oblique in latus AB vim suam exerceat, eodem modo ista vis decomponenda erit, ac vis columnae GM; nullus itaq nisus invenietur unquam, qui pressionis aliquid suo in fundum BF transmittere valeat. Ergo &c

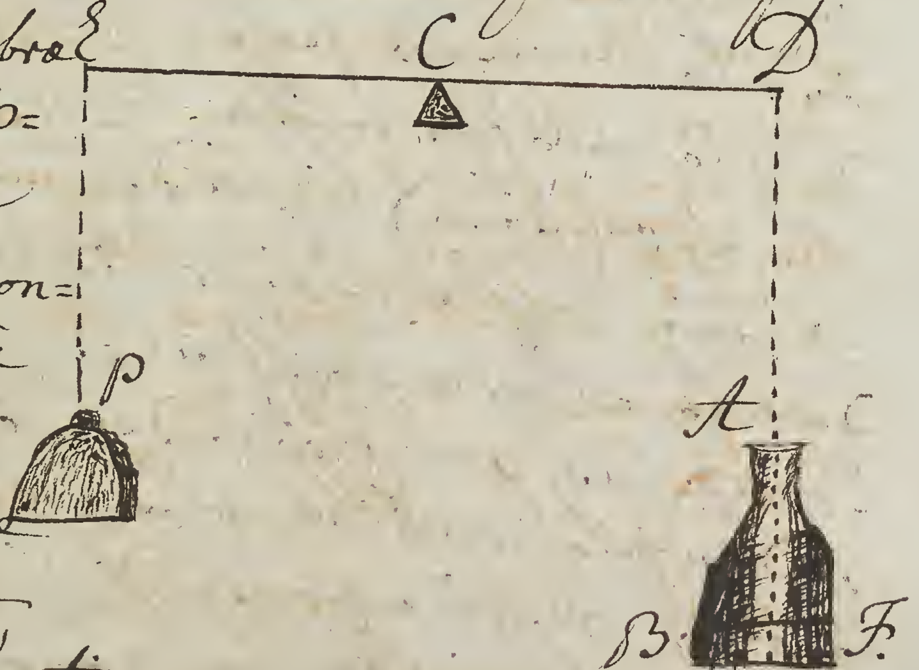
Inst: 2°. Si columnae laterales nullam exercerent pressionem in fundum tubi conici inversi, qui fundum hunc manu sustineret, non magis gravaretur, quam sustinendo fundum tubi cylindrici ejusdem basis & altitudinis; Atqui falsum consequens; Ergo &c.

Dist: Maj: Qui sustineret fundum tubi utriusq mobilem, is aequaliter gravaretur, Conc: Qui sustineret fundum utriusq immobilem, &c Nego Maj: & distincta similiter Minore, Nego Conseq.

Longe aliud est sustinere fundum

cujusdam tubi mobilem, & epistomii vices supplentem, aliud sustinere fundum immobilem: Quo enim parietibus tubi immobiliter adhæret fundus, tunc fluidum solidorum more sustollitur, atq nulla pressio, sed tm onus quoddam manu sustineretur. Cum vero fundus est mobilis, manus pressionem fluidi pprie dictam experitur. Porro æqualis est hæc pressio ubicumque eadem manet basis & altitudo, quidquid sit de quantitate, hoc est, de pondere absoluto liquidi in tubo contenti.

Si enim epistomium vasis fundo aptatum ex unâ libræ extremitate appensum, cum certo quodam pondere ex alterâ appensum extremitate libræ æquilibretur,



Docet experientia manere æquilibrium in qamcunq formam mutetur vas, viz sive latius superne fiat, sive angustius, modo, inquam, constans altitudo servetur, & eodem epistomio qantamcunq fluidi quantitatem, & qantulamcunq pariter sustineri. &c

Dices 2do: Sint duo tubi cylindrici ejusdem basis, sed quorum alter sit quadruplo al=tior altero. Constat experientia liquidum e tubo altiori non effluere, nisi cum duplâ velocitate; Atqui si in eodem foret pressio quadrupla, velocitas liquidi ef=fluentis quadrupla item foret. Ergo &c.

Nego Min: Causa etenim quadrupla effectum habere non potest, nisi quadru=plum; Atqui quadruplo major est pres=sionis effectus quoties liquidum exit cum velocitate duplâ. Nam evidens est duplam esse non posse velocitatem, nisi duplo major intra idem tempus (dato viz. foramine) liquidi quantitas effluat. Atqui duplo major liquidi quantitas duplo celerius effluens, effectus est qua=druplus, qui proinde causam requirit quadruplo validiorem. Notum est enim omnis vim impellentem aestimari ex producto molis impulsae per commu=nicatam velocitatem. Ergo &c.

Inst: Si utriusque tubi liquidum in lamellas horizontales, ejusdemque altitudinis dividatur, erunt quadruplo plures in tubo quadruplo altiori; quam=

=obrem lamella infima quadruplo majori pressione urgebitur. insuper eritt eadem mole, ac lamella infima brevioris tubi. sed datâ mole velocitas est ut vis tota, seu in præsenti hypo=
=thesi ut pressio. Ergo si pressio esset altitudini proportionata, oportet velo=
=citatem lamello infimo exeuntis e tubo quadruplò altiori, esse quadruplam.

Dist: Min: Datâ mole, velocitas est ut vis tota, si idem supponatur tempus per quod vis tota exerdetur, Concedo: Sin autem diversum est tempus, Neg: Min: & Consequentiam

Itaq vis, datâ mole, est qdm ut velocitas, qam communicat, cum tempus illius actionis est idem, vel si illius actio fiat tota per temporis articulum unum & indivisum.

Verum qdo actio vis propellentis tota exeritur simul & unico temporis articulo, sed iteratis ictibus, tunc, datâ mole propellendâ, evidens est velocitatem communicatam ab eadem causâ eo ma=
=jorem fore, quo diutius perseveraverit causa istius actio, seu quo sæpius

repetiti icti illius fuerint. Ut igitur probe æstimari possit causa, tempus necessario idem supponendum est.

Non valet itaque appellatum Axioma pro causis successive agentibus, nisi cum agunt intra idem tempus.

(Jam vero pressio quæ exercetur in liquidum effluens non est simultanea, sed successiva; toties enim iteratur, quot sunt lamellæ effluentes. Ergo ut accurate æstimetur, assignandum est ei idem tempus per quod se exerceat. Atque in utroque tubo, de quo hic agitur, singulæ lamellæ infimæ ° premuntur eodem tempore. Nam in tubo quadruplo altiori, ubi infimæ lamellæ velocitas est dupla, lamella hæc duplo minus diu subjacet pressioni; siquidem dum una lamella ex tubo breviori ejicitur, duæ interim exeunt ex tubo altiori; ita ut pressio quadrupla molem duplam intra idem tempus habeat propellendam. Non mirum igitur quod hanc pellere ° possit nisi cum velocitate duplâ.

Corollarium 1^m.

Unius, ejusdemq liquoris pressio in fundum varia esse potest. Sic dum Conus truncatus invertitur, tunc longè diversa pressio in basim exercetur, quamvis eadem remaneat liquoris copia.

Corollarium 2^dum.

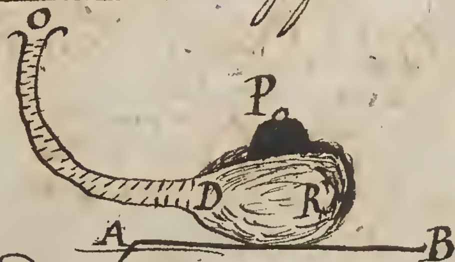
Si pressiones in fundos vasorum sint F & f, bases B & b, altitudines demum X & x, tunc erit

$$F : f :: BX : bx.$$

Corollarium 3^m.

Exigua liquoris copia potest cum multò majori æquilibrari, si nempè minor copia tubum repleat ejusdem basis & altitudinis.

Indè intelligitur ratio illius machinæ, quæ Vectis hydrostaticus appellatur, Viz. vescica DR posita in plano AB, & pondere P onusta, per tubulum OD aqua vel alius liquor infundatur. Cum



pondus attolletur, quoties productum basis vescicæ in tubuli altitudinem majus erit pondere P.

Liquoris loco aer adhiberi potest, & follium ope in vescicam immitti, vel insufflando in tubulum; atq hoc pacto vel puero facillimum est ingentem molem sublevare.

Corollarium 4.m

Inveniri potest nisus aquæ stagnantis in basim receptaculi, in hunc modum: Bilancis ope exploretur quantum in basim cognitam b sub datâ altitudine a ponderet quantitas aquæ exigua. Tum altitudine receptaculi dictâ A, & basi B, illa instituatur analogia:

$$ab : AB :: p : x = \frac{AB}{ab}p.$$

Scholium.

Pressionis æstimandæ ratio aliter demonstrari potest, facili computatione adhibitâ.

Dividatur nempè fluidum in qolibet vase contentum in lamellas, quarum sit communis altitudo $= dx$. Sint

lamellarum moles, $= m, m'$, &c, earumq bases $= b, b'$, &c.

Erit primum, ob eandem altitudinem,

$$m : m' :: b : b'.$$

Nunc si m' cederet pressioni lamellæ m, cui subjicitur, eo tempore m descenderet quantitate ∂x, m' descenderet quantitate quâdam $= \partial s$. Si ergo velocitates m & m' dicantur u & u', habetur $u : u' :: \partial x : \partial s$.

Sed m descendens, necessariò depellit quantitatem fluidi sibi æqualem; ergo æquales sunt cylindri, quorum alter habet pro altitudine ∂x, & pro basi b, alter autem altitudinem habet $= \partial s$, & basim $= b'$:

Ideòq $\partial x : \partial s :: b' : b.$

Substituendo igitur $b' : b = m' : m$ in locum $\partial x : \partial s$, erit

$$u : u' :: m' : m;$$

Ergo $mu = m'$.

Itaq omnium lamellarum pressio in fun=
=dum tubi, æquat pressionem unius
lamellæ infimæ per numerum lamella=
=rum multiplicatæ, seu $F = Bx$.

Jam de effluxu liquidorum pauca
investiganda veniunt. Itaq sit

Conclusio 2da.

In tubis diversis qbuscumq, sive
manent ii constanter pleni, sive de=
=plentur, velocitas liquidi effluentis
per æqualia orificia, est ut radix qua=
=drata altitudinis.

Demonstr. Sit pressio tota columnæ
orificio respondentis $= F$. Cùm pressio
sit ut velocitas liquidi effluentis
per ipsius molem multiplicata, dato
viz. tempore, oportet esse

$$F = mu.$$

Sed m sequitur semper raonem u;
dupla enim esse o potest velocitas,
nisi duplò major eodem tempore
liquidi copia per datum foramen effluat,

Ergo — $F = m^2 = u^2$: ——

Et consequenter $u = \sqrt{F}$; ——

Et similiter — $m = \sqrt{F}$. ——

Est autem, dato foramine

$$F = x; ——$$

Ergo — $\underline{u}$, itemque $\underline{m} = \sqrt{x}$ ——

Altera ejusdem rei Demonstratio.

Sit orificium $= \mathcal{L}$: erit pressio elementaris columnæ orificio responDentis, hoc est, uniuscujusque seorsim lamellæ, in quas dividi potest, $= m\,\partial u = \mathcal{L}\,\partial x\,\partial u = \partial(F)\,\partial t$. ——

Aliunde vero $\partial t = \frac{\partial x}{u}$; ——

Ergo — $\frac{\partial(F)\,\partial x}{u} = \mathcal{L}\,\partial x\,\partial u$; ——

Seu — $\partial(F) = \mathcal{L}\,u\,\partial u$: ——

Ergo — $F = \int \mathcal{L}\,u\,\partial u$: ——

Si igitur $\mathcal{L}$ sit constans, ——

$$F = \frac{1}{2}\mathcal{L}\,u^2. ——$$

Sed est semper $F = \mathcal{L}\,x$;

Ergo $x = \frac{1}{2}u^2$, $u = \sqrt{2x}$. — Ergo &c.

Corollarium 1^m:

In tubis constanter plenis velocitas in=
=fimo lamella effluentis, aequalis est ei,
quam acquisivisset ex summâ tubi alti=
=tudine liberè decidendo. ——

Decideret enim motu aequabiliter
accelerato; Atqui in isto genere motûs
velocitas acquisita, est ut radix qua=
=drata spatii decursi; Ergo &c.

Corollarium 2^dum:

In tubis qui deplentur ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ liquidum effluit cum motu
aequabiliter retardato. ——

Proinde si tubus cylindricus est,
intervalla q^bs superficies superior
liquidi intra tubum singulis instan=
=tibus descendit, decrescunt ut numeri
impares .... 7.5.3.1. ——

Generatim verò ——

Conclusio 3^tia:

Si dividatur liquidum in exiguas

lamellas, quarum sit eadem altitudo, tempus per quod singula effluent, erit ut $\frac{B}{\sqrt{x}}$.

Demonstr. Cum eadem sit lamellarum altitudo, singula sunt inter se ut bases. Jam vero si velocitas foret eadem, eo magis insumeretur tempus in cujusq effluxu, quo hoc major foret; Ergo tempus esset ut B.

Si autem, ut est eadem lamellarum altitudo, sic quoq eadem esset basis, eo diutius perseveraret lamella effluxus, quo minor foret exeuntis velocitas; tempus itaq esset ut $\sqrt{x}$.

Ergo cum diversa est basis lamellarum, & diversa velocitas, tunc $t = \frac{B}{\sqrt{x}}$.

Nota: In hâc Conclusione constans orificium supponitur.

Corollarium

1.

Si fingantur vasa per revolutionem alicujus curvæ generata, æstimari poterit quantum singulis instantibus æqualibus deprimi intra vas supremam

liquidi superficiem oporteat.

Demonstr. Diviso enim ut ante liquido in lamellas, quarum ~~...~~ altitudo sit $= \partial x$, erit soliditas singularum $= cy^2 \partial x$, si nempe fiat ratio diametri ad peripheriam circuli $1 : c$. Sit tempus per quod singulo effluunt $= \partial t$.

Est igitur $\partial t = \dfrac{cy^2 \partial x}{\sqrt{x}}$.

Ergo $t = \int \dfrac{cy^2 \partial x}{\sqrt{x}}$.

Jam vero loco y^2 substituenda erit aequatio illius curvae, cujus revolutione generatus fuerit tubus.

1°. Si tubus cylindricus, constans est ois cy^2; proinde integrando negligi potest, eritq. $t = \int \dfrac{\partial x}{\sqrt{x}}$ = neglectis constantibus, $\sqrt{x}$.

2do si tubus est conicus, $t = \int \dfrac{x \partial x}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}$.

3°. si sphaericus est tubus, seu revoluto circulo generatus $t = \int \dfrac{2ax\partial x - x^2 \partial x}{\sqrt{x}}$ $= 2ax^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}}$.

4°. In tubo parabolico $t = \int \dfrac{px \partial x}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}$.

Si autem fingatur tubus per revolutio=
=nem parabolæ primo quarti ordinis
effectus, in quâ nimirum

$$y^4 = p^3 x,$$

seu $y^2 = \sqrt{x}$,

tunc erit $t = \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}} = x.$

Hoc igitur isti tubo proprium est, ut superficies suprema aquæ in eo contentæ, æqualibus temporibus juxta altitudinem æqualiter descendat. Quam=
=obrem ut tubus ejusmodi in horolo=
=gium adhibeatur, æquales divisiones in illius axe notandæ sunt.

5.° In ellipsoide eadem est tempo=
=rum depletionis ratio ac in sphæro=
=ide:

6.° demum in hyperboloide $t = 2ax^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$.

Quod si hyperbolæ ad Asymptotum refe=
=ratur, fingaturq tubus revolutâ Asymp=
=totâ generatus, tunc loco y^2 in formulâ ponetur $x^{-\frac{2m}{n}}$, quæ est æquatio hyperbolæ ad Asymptotos relatæ.

Erit igitur $\int \frac{y^2 dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{x^{-\frac{2m}{n}} x}{\sqrt{x}}$;

Seu $t = \frac{2n}{n-4m} x^{\frac{n-4m}{2n}}$.

Si hyperbola sit primi ordinis, habebitur $t = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}}$,

adeoque Log. T : log. t :: Log. X : log. x.

Conclusio 4.ª

Si vasa quæ deplentur, sint diversi generis, erunt tota effluxuum tempora ut radices quadratæ altitudinum ductæ in bases ac per foramina divisæ; seu dictis Altitudinibus A & a; [redacted]

$$T : t :: \frac{B\sqrt{A}}{L} : \frac{b\sqrt{a}}{l}.$$

Demonstr. 1° enim si altitudines æquantur, tunc etiam æquantur celeritates; aliunde si æqualia sint foramina, æquales liquoris quantitates singulis temporum articulis effluunt. Ergo sunt effluxuum tempora ut quantitates liquoris effluentes. Porro quantitates istæ ob eandem altitudinem, sunt ut bases; Ergo quoties sub eadem altitudine foramina æquantur, tunc sunt effluxuum tempora ut bases, seu T : t :: B : b.

2°. Si tum bases, tum foramina sint æqualia, jam tempora q[uibu]s evacuantur vasa, sunt ut radices quadratæ altitudinum. Hâc enim in hypothesi tempora effluxuum sunt ut celeritates: Atqui celeritates sunt ut radices quadratæ altitudinum; Ergo eandem rationem habent effluxuum tempora, seu

$$T : t :: \sqrt{A} : \sqrt{a}$$

3°. Demum si æquales utrinq[ue] sint bases atq[ue] altitudines, erunt effluxuum tempora in ratione inversâ foraminum. Tunc enim quantitates singulis temporum articulis effluentes sunt ut ipsa foramina; Atqui tempora effluxuum sunt inversè ut quantitates singulis temporum articulis effluentes; Ergo sunt etiam inversè ut foramina, seu

$$T : t :: \frac{1}{L} : \frac{1}{l}.$$

Ergo &c.

Scholium.

Ex Conclusione 3ª idem deduci potest facillime pro tubis simillimis, & conicis.

14°. Est enim pro singulis lamellis in tubo v: g: cylindrico $T:t::\frac{B}{\sqrt{X}}:\frac{b}{\sqrt{x}}$.

In cylindro autem basis oium lamella=rum est eadem, earumque numerus; Ergo ~~per~~ totum tempus effluxus in quo=vis tubo cylindrico $=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$, ut inte=grando inventum est in Corollario ejus=dem Conclusionis. Itaque in duobus cy=lindris erunt integra effluxuum tempora $::\sqrt{X}:\sqrt{x}$ datis basi & foramine.

Quod si ō detur basis, tunc præter numerum x lamellarum habenda erit ratio earum magnitudinis, quæ quidem est ut basis. Tunc igitur

$$T:t::B\sqrt{X}:b\sqrt{x}.$$

Si nec foramen detur, considerandum est, eo plus liquoris singulis temporum articulis exire, quo amplius foramen fu=erit; proinde eo minus temporis in effluxu toto insumi; atque idcirco

$$T:t::\frac{B\sqrt{X}}{L}:\frac{b\sqrt{x}}{l}.$$

In aliis autem tubiss similibus curvâ generatis, cujus æquatio sit

$$y^2 = 2ax \mp x^2, \text{———}$$

est ~ $\mathcal{T} : t :: 2aX^{\frac{3}{2}} \mp X^{\frac{5}{2}} : 2ax^{\frac{3}{2}} \mp x^{\frac{5}{2}}$

seu ~ $\mathcal{T} : t :: cY^2\sqrt{X} : cy^2\sqrt{x} :: B\sqrt{X} : b\sqrt{x}$.

Ita est, inquam, dato foramine. ———

Imò vero idem pro tubis cujuscumq ex conicarum revolutione ortis ex Corollario Conclusionis 3.ª arbitror posse demonstrari: ———

Est enim in quovis tubo tempus ∂t per quod infima lamella egreditur, dato foramine, $= \frac{y^2 \partial x}{\sqrt{x}}$. Atqi in tubo, qui depletur, singulæ lamellæ vicissim fiunt infimæ; Ergo tempus per quod summa ∂temporum, per quæ oes lamellæ effluunt $= \int \frac{y^2 \partial x}{\sqrt{x}} = B \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}$. Ergo in duobus tubis qbscumq pro temporum summæ, hoc est, tota effluxuum tempora sunt inter se

$$:: B \int \frac{\partial X}{\sqrt{X}} : b \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}; \text{———}$$

 seu $-\ T : t :: B\sqrt{X} : b\sqrt{x}$ —

Si nunc forominum habeatur ratio, erit &c —

Conclusio 5.ª

Quantitates liquorum ex tubis effluentium sunt in ratione composita foraminum, temporum & radicum quadratarum altitudinum, seu

$$Q : q :: LT\sqrt{A} : lt\sqrt{a}$$ —

Demonstr. 1.º si aquales sint tuborum altitudines, aquales quoq. erunt liquidi effluentis velocitates; Ergo intra idem tempus liquor ex utroque tubo erumpens idem spatium conficiet, seu eadem erit longitudo rivulorum utrimq. profluentium. Quantitas autem liquidi ejecti est ut soliditas istorum rivorum: rursus cum ii sint prismata ejusdem altitudinis, hac soliditas est ut basis eorumdem, seu ut foraminis amplitudo; Ergo datis TA Q : q :: L : l —

2° si eadem sit altitudo idemq foramen, tunc eandem oportet esse longitudinem rivulorum, eandem basim per singula temporum momenta æqualia; Ergo singulis temporibus æquales effluunt quantitates; Ergo tota egressi liquoris copia per tempus haud definitum rationem ipsius temporis sequitur, seu

$$Q : q :: T : t$$

3° demum, si tum foramen, tum tempus idem supponitur, æquales sunt bases rivulorum effluentium, eorumq longitudines sunt ut velocitates effluxuum, hoc est, radices quadratæ altitudinum: Atqui quantitates liquorum ejectorum sunt inter se, ut prismatum effluentium longitudines datis viz. basi & tempore; Ergo

$$Q : q :: \sqrt{A} : \sqrt{a} \text{. Ergo \&c.}$$

Altera ejusdem conclusionis demonstratio ex conclusione 3ª. erui potest.

144. In quovis enim tubo tempus per quod ultima effluit lamella, habitâ ratione foraminis, est $\partial t = \frac{B\partial x}{L\sqrt{x}}$.

Nunc fingatur idem esse ∂t ex utrâque parte, tunc $\frac{B\partial x}{L\sqrt{x}} = 1$.

Atqui $B\partial x$ exhibet quantitatem liquidi intra unumquodque tempusculum ejecti. Est igitur singulis tempusculis æqualibus

$$Q = L\sqrt{x}.$$

Ergo elapso tempore T, erit $Q = LT\sqrt{x}$;

Seu $Q : q :: LT\sqrt{x} : lt\sqrt{x}$.

Problema 1^{m}.

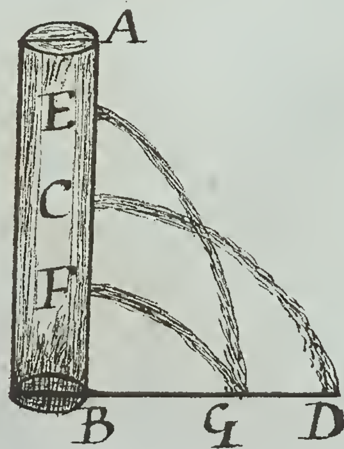
Invenire rationem quantitatum liquidi ex duobis tubis cylindricis æquè altis, & quorum foramina sint æqualia per idem tempus exeuntium; sed quorum tuborum alter maneat constanter plenus, alter continuò depleatur?

Solutio. Cùm in tubo constanter pleno eadem pressio toto effluxûs tempore perseveret, æquabilis est liquidi exeuntis velocitas. Cùm verò pressio in altero continuò decrescat

fluidumq interius, ut anteà dictum est, descendat motu æquabiliter retardato, liquidum exiens æquabiliter etiam retardatur. Proterea ejus velocitas initialis æqualis est ei, quâcum constanter effluit liquidum ex priori tubo. Ergo spatia singulis temporibus emensa a liquore cum ex priori tum ex altero exeunte, sunt inter se :: 2 : 1. Atqi dato foramine, qantitates effluentes sunt inter se ut illa spatia; Ergo ex tubo constanter pleno duplo major liquidi quantitas, quàm ex altero, intra idem tempus emittitur.

Problema 2.dum

Cognitâ altitudine tubi constanter pleni, & ex latere perforati in puncto dato C determinare jactus amplitudinem BD?



Solvit^r. Sit tubi altitudo = a; sit pars tubi inferior CB = x;

 erit $AC = \alpha - x$.

Jam verò BD est spatium horizontale emensum per velocitatem æquabilem liquidi ex foramine C erumpentis. Si ergo fiat $BC = s$, erit $s = tu$.

Sed velocitas effluxûs semper æstimatur ex radice quadratâ altitudinis, hoc est, distantiæ foraminis à summo tubo;

Ergo $u = \sqrt{a-x}$.

Tempus autem quod in percurrendo spatio BD insumitur, idem est ac tempus per quod liquidum proprio pondere ex altitudine CB laberetur. Laberetur autem motu æquabiliter accelerato.

Proindè $t = \sqrt{x}$.

Ergo $s = \sqrt{ax - x^2}$,

Si igitur x sit cognitum, amplitudo jactûs s erit etiam cognita.

Et vicissim datis s & x, invenietur $a = \frac{s^2 + x^2}{x}$.

Deraum datis a & s, deprehendetur
$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4s^2}.$$

Problema 3^m.

Determinare parametrum curvæ CD a liquido effluente descripta?

Solvitr. In hypothesi tubi constanter pleni, curva descripta, est parabola ordinaria, cujus Abscissa est altitudo ex quâ liquidum cadit, Ordinata autem ipsa amplitudo jactûs.

Ergo $s^2 = px = ax - x^2$,

Unde $p = a - x = AC.$

Ideoq pars lateris quæ à summo tubo ad foramen pertinet, est parameter illius parabolæ, quam liquidum effluendo describit.

Problema 4^m.

Indicare ubi sit perforandus tubus, ad efficiendam jactûs amplitudinem maximam?

Solvitr. Cum jactûs amplitudo est maxima, tum est

$$\partial(s^2) = a\partial x - 2x\partial x = 0;$$

Ergo —— $x = \frac{1}{2}a$. ——

Itaq ut habeatur maxima am=
=plitudo jactûs, tubi latus perforandum
in medio est. ——

Corollarium.

In hypothesi amplitudinis maximæ,
—— $p = x \pm s$. ——

Problema 5.m

Indicare punctum lateris tubi ape=
=riendum, ut liquor effluens parabolam
describat, cujus area sit maxima?

Solutio! Area cujuscumq parabolæ
$= \frac{2}{3}$ rectanguli circumscripti. ——

Area igitur posita $= \frac{2}{3}xs = \frac{2}{3}x\sqrt{ax-x^2} =$
$=$ Maxim: ——

Ergo — $\partial(ax^3 - x^4) = 3ax^2\partial x - 4x^3\partial x = 0$:

Unde — $x = \frac{3}{4}a$. ——

Problema 6.m

Invenire duo lateris puncta ape=
=rienda, ex q[uibu]s exeuntes rivuli in
idem plani punctum incidant? ——

Solvitr. Sit altitudo prioris puncti $= X$, inferioris autem $= x$. ——

Erit — $aX - X^2 = ax - x^2$; —

Ergo — $X : x :: a - x : a - X$. —

Hoc est, quæsita punctorum altitudines sunt inverse ut differentiæ, quæ existunt inter ipsas & integram tubi altitudinem. ——

Sit $\underline{a} = 20$ Ped:, sitq $X = 16$ P. seu $a - X = 4$ P.

Erit $x = 10 \pm 6 = 16$ vel 4. ——

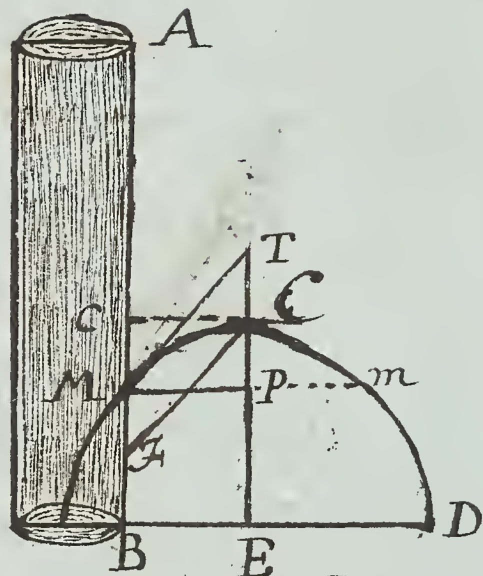
Nota: valent ea quæ hic dicta sunt, qdo sunt foramina, seu foraminum parietes lateri perpendiculares. Sed paulò aliter procedendum esset, si foramina tubi lateribus obliqua fierent. Itaque ——

Problema 7m.

Determinare amplitudinem jactûs, qdo foramina sunt tubi lateribus inclinata? ——

Solvitr. Perforetur latus AB juxta directionem TM. Sitq angulus

inclinationis TMA = z.



Liquidum erumpens, describet Parabolam MCD, cujus apex erit constitutus in puncto C extra tubum; & huic parabolo Tangens erit linea TM ad foramen ipsum M. Ut determinetur amplitudo jactûs BD, primùm est inveniendum BE = MP = y. Tum facillimè invenie=tur ED. —

Est autem $y^2 = \overline{MT}^2 - 4x^2$.

MT verò est spatium quod à liquido ef=fluente æquabili motu conficeretur, si soli obsequeretur pressioni, hoc est, demptâ actione gravitatis, igitur MT = tu. Sed liquidum ob actionem gravitatis pervenit ad punctum C puncto T inferius quanti=tate CT = x. Spatium igitur vi solius gravitatis emensum = x. Ergo $t = \sqrt{x}$.

Aliundè $u = \sqrt{AM} = \sqrt{a'}$; —

Ergo — $\overline{MT}^2 = a'x$; —

Ideoque $y^2 = a'x - 4x^2$.

Sit jam MC = Sin. tot. & ex triangulo McF eruetur ista proportio —

$$x : \tfrac{1}{2} y :: 1 : \text{tang.} z.$$

Ac consequenter $x = \frac{y}{2\,\text{tang.} z}$ ...... (A).

Jam substituendo hunc valorem x, fiet

$$y^2 = \frac{\acute{a}\, y}{2\,\text{tang.} z} - \frac{y^2}{\text{tang.}^2 z};$$

Unde ..... $y = \dfrac{\acute{a}\,\text{tang.} z}{2\,\text{tang.}^2 z + 1},$

Vel ..... $y = \dfrac{\left\{\dfrac{\acute{a}\,\sin. z}{2\cos. z}\right\}}{\left\{\dfrac{\sin.^2 z + \cos.^2 z}{\cos.^2 z.}\right\}} = \frac{1}{2}\acute{a}\,\sin. z \cos. z$ .. (B).

Nunc vero ut inveniatur ED, fieri debet ista proportio .. $\overline{ED}^2 : y^2 :: \ddot{a} + x : x$; & quâ deducetur ... $ED = \dfrac{y\sqrt{\ddot{a}+x}}{x}$;

Seu ... $ED = y\sqrt{\dfrac{2\ddot{a}\,\text{tang.} z}{y} + 1} = \sqrt{2\ddot{a}\, y\,\text{tang.} z + y^2}.$

Jam hîc substituto valore y sumpto ex æquatione B, calculo absoluto, invenietur $ED = \sqrt{\ddot{a}\,\acute{a}\,\sin.^2 z + \frac{1}{4}\acute{a}^2 \sin.^2 z \cos.^2 z}$ .. (C).

Corollarium 1.

Si prosiliat liquor ex puncto infimo lateris aperto, detturq altitudo & amplitudo jactûs, facilè ex æquatione A

 innotescet angulus tali jactui conve=niens. Ac vicissim dato directionis angulo & amplitudine jactûs, ejusdem altitudo x facillè detegetur, vel datis angulo & alti=tudine, statim obvia erit basis seu am=plitudo jactûs, nempè $2y$. ——

Corollarium 2^dum.

Pars lateris superior a' est semper æqualis parametro curvæ relatæ ad dia=metrum, cujus est origo in ipso foramine. Si enim ducatur ad hanc diametrum Ordi=nata $CF = MT$, dabit parabolæ natura

—— $\overline{CF}^2$ seu $\overline{MT}^2 = p'x$; ——

Atqui jam erat $\overline{MT}^2 = a'x$; ——

Ergo —— $p' = a'$. ——

Est etiam parameter ad axem parabolæ a liquido descriptæ, $p = a' - 4x$; ——

Nam est semper $y^2 = px - 4x^2$; ——

Atqui jam erat $y^2 = a'x - 4x^2$; ——

Ergo —— $p = a' - 4x$. ——

Corollarium 3^m.

Si fingatur angulus z rectus, tum in æqua=tione BB — Cos. z erit $= 0$; proindè erit etiam $y = 0$; quemadmodum esse oportet. ——

In eādem hypothesi æquatio C fiet

$$ED = \sqrt{d''d'}$$

~~ut in problemate secundo~~

Ideoque si appellaretur d'', x, ut anteà factum est, tota autem altitudo $\underline{a}$, & consequenter d' esset $= a - x$, tunc haberetur

$$ED = \sqrt{ax - x^2};$$

ut in problemate secundo.

Corollarium 4.^{m}

Jam si quis invenire voluerit angulum directionis *maximæ* idoneum jactûs amplitudini, is facile poterit deprehendere hunc angulum esse $= 45°$.

Demonstr. Si supponatur semi-amplitudo y esse *maxima*, tum $d\left(\frac{1}{2} d' \operatorname{Sin.} z \operatorname{Cos.} z\right) = 0$.

Ergo $d(z) \operatorname{Cos.}^2 z = dz \operatorname{Sin.}^2 z$,

Seu $\operatorname{Cos.} z = \operatorname{Sin.} z$;

Ergo $z = 45°$.

Valet istud ad *maximam* amplitudinem obtinendam, qdo ambo crura parabolæ æqualia supponuntur, seu in plano horizontali foramini M respondente.

Si verò inæqualia sint parabolæ crura, & propositum sit invenire angulum directionis, qualis requiritur, ut quovis alia amplitudo, V. G. BD sit maxima, sic

 poterit problema resolvi: —

Erit primum $\partial(ED)^2 = 0$; —

seu negligendo factorem $\acute{a}$ & in locum $\text{Cos.}^2 z$ substituendo $1 - \text{Sin.}^2 z$, erit —

$$\partial\left(a'' \text{Sin.}^2 z + \tfrac{1}{4} \acute{a}\, \text{Sin.}^2 z - \tfrac{1}{4} \acute{a}\, \text{Sin.}^4 z\right) = 0;$$

fiat brevitatis causâ $\text{Sin.}\, z = q$; —

Jam prodibit æquatio

$$a''\partial.(q^2) = -\tfrac{1}{4}\acute{a}\,\partial.(q^2 - q^4)$$

$$2a''q\,\partial(q) = \acute{a}\,q^3\partial(q) - \tfrac{1}{2}\acute{a}\,q\,\partial.(q)$$

$$2a'' = \acute{a}\,q^2 - \tfrac{1}{2}\acute{a}$$

$$q = \text{Sin.}\, z = \sqrt{\frac{2a'' + \frac{1}{2}a'}{a'}}:$$

Si sâ $a'' = 0$, tunc $\text{Sin.}^2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; Ergo $z = 45°$, ut hujus Corollarii initio. —

Corollarium 5.^m

Adhiberi potest theoria hactenus exposita de fluidorum jactu ad æsti=mandam vim aquæ ex alto ruentis, & illius actionis, quâ præceps agitur; imo vero quolibet pressio liquidi cujuscumque ex consideratâ tum alti=tudine tum amplitudine jactûs sat facilè ex dictis æstima=bitur —

Convenit quoq hoc Theoria globis tormen=
=tariis; & generatim corporibus quocumque
projectis. Cum enim corpus quodlibet
projectum duplici animetur vi, alterâ
gravitatis, quæ est Horizonti perpendicu=
=laris, quoq est æquabiliter acceleratrix,
alterâ tangentiali, quæ est Horizonti
parallela, semperq eadem perseverat;
evidens est spatia quæ deorsum per
gravitatem solam conficerentur, esse
ut quadrata spatiorum parallelorum
æquabili velocitate per vim tangentia=
=lem efficiendorum; Atqi spatia perpen=
=dicularia singulis temporum inter=
=vallis confecta exhibent Abscissa
illius curvæ, quam corpus projectum
describit: spatia autem parallela
iisdem temporum intervallis emensa
exhibent Ordinatæ. Curva igitur à
corpore descripta, est ejusmodi, ut
ipsius Abscissæ crescant ut quadrata
Ordinatarum. Ergo oia corpora pro=
=jecta Parabolas describunt. ——

Jam ut incepta de fluidorum motu
effluxuq disputationi imponatur finis,
investigandum superest quâ raone æsti=
=mari debeat fluidorum impetus in

aggeres oppositos.
Impetus autem ille est vel directus vel obliquus.

Conclusio 6.ª

Actio fluidi directa in superficiem immobilem est in ratione compositâ densitatis suæ & quadrati suæ velocitatis, & superficiei ipsius, in quam impingitur.

Demonstr. Nam 1.º datis fluidi velocitate & superficie oppositâ, patet eò majorem fluidi actionem fore, quò plures simul partes in superficiem incurrerent; Atqui iste numerus partium est ut densitas fluidi; Ergo &c.

2.do Datis densitate & superficie, eò major debet esse vis fluidi, quò plures ipsius partes eodem tempore in superficiem incurrunt, & quò majori singulæ agitantur celeritate; Atqui celeritas partium singularum est ut totius fluidi velocitas; proptereà

numerus partium, quæ dato tempore ad oppositam superficiem applicantur, est ut eadem fluidi velocitas. Ergo fluidi actio in planum oppositum est in ratione duplicatâ ipsius velocitatis.

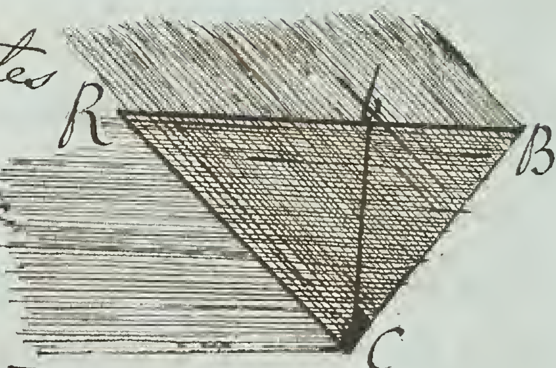
3.° Datis densitate & celeritate fluidi, quò major erit superficies opposita, eò plures in eam se immittent fluidi moleculæ; ideòq. eo validior erit fluidi impetus.

Ergo &c

Conclusio 7.ª

Directus fluidorum impetus est ad obliquum, ut productum superficiei obviæ in quadratâ tum celeritatis prioris fluidi, tum sinûs totius est ad productum alterius superficiei in quadratâ tum celeritatis alterius fluidi, tum sinûs obliquitatis.

Demonstr. 1.° enim si directionis angulus utrinq. esset rectus, impetus fluidorum essent ut superficies obviæ



in quadratas velocitates ducto, quemadmodùm in praecedenti Conclusione effectum est.

2.° Hîc igitur demonstrasse satis erit, datis superficiebus obviis & celeritatibus fluidorum irruentium, esse eorum impetus F & f :: Sin.^{2} totus : Sin.^{2} inclin.

Istud autem sic possumus exequi: si fluidum cujus absolutam vim exhibet RC directè & ad perpendiculum ageret in superficiem oppositam BC, tum fluidi vis tota, quantacumque est, impenderetur; numerusq molicularum singulis tempusculis obnitentium in BC, per hanc eamdem superficiem exhiberetur; igitur si totum fluidum divisum concipiatur in tot lamellas, quot sunt lineae in superficie objectâ, singularum vis lamellarum per singulas lineas exhibebitur. Sit autem una ex his lineis BC = Sin. tot: Est ergo vis tota & absoluta fluidi, ut BC, seu ut Sinus totus.

Sed cum obliquè agit fluidum, RC decomponitur in duos nisus, alterum parallelum, qui repraesentari potest per BC, perpendicularem alterum RB; porrò nisus BC est inanis & irritus; superficies igitur, seu linea BC solius RB actionem recipit.

Ex eâ consideratione nascitur primum illa proportio

$$F : f :: RC : RB;$$

Seu $F : f :: BC : Bb$
$:: \text{Sinus totus} : \text{Sin. inclin};$

Valet, inquam, hoc proportio, nullâ habitâ ratione moliculârum, quae superficiem objectam tum in directo occursu, tum in obliquo feriunt.

Sed pendet proterea actio fluidi ex numero moliculârum in oppositum aggerem singulis temporum articulis objectarum. Porrò cum directus est fluidi impetus, tum numerus istarum moliculârum pro unaquâque lamellâ est = BC; cum obliquus est impetus, plures in BC agunt moliculae, quam transeunt per Bb;

horum itaq numerus est tum = Bb.

Ad aestimandam igitur rationem ac=
=curatam F ad f, dupplicanda est ratio
BC : Bb, seu Sin. tot. : Sin. inclin. Proindè
jam —— F : f :: Sin.² tot. : Sin.² inclin.

Corollarium.

Si obliqua sunt ambo fluida, illorum
impetus sunt inter se ut productum
superficiei unius in quadratâ cele=
=ritatis & Sinûs inclinaonis prioris
fluidi, est ad productum superficiei
alterius in qadratâ celeritatis et
sinûs inclinaonis alterius fluidi.

Problema.

Ex angulis obliquis, sub qbs ventus
aut aliud fluidum in molendini alas
incurrit, eum invenire sub quo pos=
=sent alae maximâ cum celeritate
contorqueri? ——

Solvitr. Sit BC planum alae
contorquendae, directio venti sit RC.
Inveniendus est angulus BCR. ——

Si actio venti in planum BC

esset directa, foret hoc ad vim obliquam :: 1 : Sin.^{2} inclin: Namque est generatim $F : f :: SU^2 r^2 : su^2$ Sin.^{2} inclin. Verum hîc $S = s$, $U^2 = u^2$; quapropter

$$F : f :: 1 : \text{Sin.}^2 \text{inclin:}$$

Ergo impetus venti obliquus, est

$$f = F \text{ Sin.}^2 \text{ inclinationis.}$$

Nunc autem actio f non tota ad contorquendam alam adhibetur; neque enim ala volvitur in circulo, qui sit parallelus directioni RB = f, sed perpendiculariter ad Axem, cui est infixa, qui que est directioni venti parallelus. Itaque conatus RB vis obliquæ totius, decomponitur in duos nisus, nempe Rb parallelum Axi, & agitando in circulum alo prorsus inutilem, tum verò in nisum bB eidem Axi perpendicularem, qui ad convertendam alam solus impenditur. Vis igitur obliquæ conatus alter est absolutus RB, alter verò relativus bB.

Prior autem jam erat $f = F$ Sin.^{2} inclin. Sit posterior $= p$. Erit jam

$F \text{Sin}^2 \text{inclin.} : p :: RB : bB.$

Sed similia sunt triangula RBC, RBb;

Ergo $F \text{Sin}^2 \text{inclin.} : p :: RC : BC$
$:: 1 :$ Cosinus inclinaonis.

Proindè $p = \text{Cosin. inclin.} \times F \text{Sin}^2 \text{inclin.}$

Et hoc est quantitas, quæ juxta con=
=ditionem propositæ quæstionis, debet
esse maxima.

Sit ergo Cosinus inclinationis $= x$;
erit consequenter $\text{Sin}^2 \text{inclin.} = R^2 - x^2$; &

$$p = F(R^2x - x^3) = \text{Maximum.}$$

Jam neglecto factore constante F;

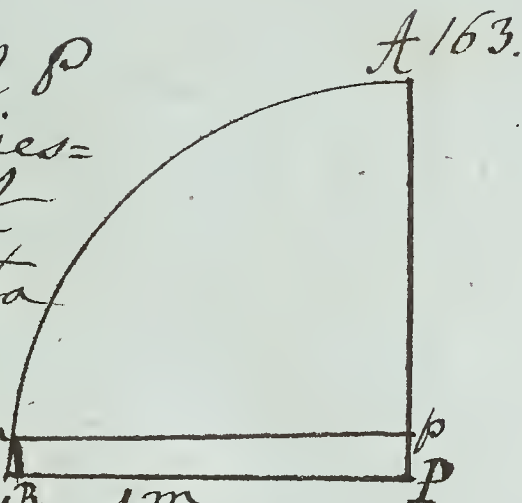
$$R^2 dx - 3x^2 dx = 0:$$

Unde $x = R\sqrt{3}.$

Porrò in tabulis respondet iste Cosinus angulo $35^{\text{deg.}} . 16^{\text{min.}}$; Ergo angulus inclinaonis quæsitus $= 54^{\text{deg.}} . 44^{\text{min}}$

Scholium.

Utraq conclusio ultima inservire potest æstimandæ resistentiæ, quam fluida opponunt solidis permeantibus.



Sit figura quovis A M P fluidum homogeneum & quies=
=cens, per apicem suum A dividens & trajiciens juxta directionem A P. ———

Problema. 1m.

Invenire resistentiam, quam ex parte fluidi experietur designata figura periferia A M? ———

Solvitr. Sit arcus infinitissimus $M \cdot m = \partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ = Sinus totus; erit consequenter M R seu ∂y = Sin. inclin.

Jam si fluidum in istam fi=
=guram quiescentem incurreret, eadem esset fluidi actio, ac ipsius resis=
=tentia, qdo intra fluidum quiescens figura ipsa movetur. Sit igitur actio directa fluidi in $M\,m = \partial(F)$; actio autem obliqua juxta directio=
=nem m R, sit $\partial(f)$. Quoniam eadem est hic superficies fluido objecta, eadem fluidi densitas, velocitasque, erit ex Conclusione 7a ———

$\partial(F) : \partial(f) :: \text{Sin}^2 \text{totus} : \text{Sin}^2 \text{inclin.}$
$:: \partial s^2 : \partial y^2;$ ——

Ergo $\partial(f) = \frac{\partial(F)\partial y^2}{\partial s^2}$; ——

Sed — $\partial(F) = \partial s$; ——

Ergo $\partial(f) = \frac{\partial y^2}{\partial s}$. ——

Igitur tota actio fluidi obliqua in convexitatem AM, seu resistentia tota fluidi in figuram motam, ut diximus, erit $f = R = \int \frac{\partial y^2}{\partial s}$. ——

Corollarium 1^m.

In singulis figuris comparari facillimè poterunt resistentiæ, quas ex parte fluidi homogenei & quiescentis experiri debet seu convexitas figuræ, seu basis; si nempè figura fluidum trajiceat modò per apicem A, modò per basim MP. Namque fluidi resistentia in basim est directa, potestq; exhiberi per ipsam basim = y. Si ergo hoc appelletur R′, habebitur

$$R : R' :: \int \frac{\partial y^2}{\partial s} : y.$$

Corollarium 2^dum^

In triangulo erit

$$\int \frac{\partial y^2}{\partial s} = \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

Ergo $R : R' :: b : \sqrt{a+b^2}.$

seu resistentia quae opponitur triangulo isosceli fluidum per apicem trajicienti, est ad resistentiam eidem triangulo opponendam, si per basim trajiceret, ut semibasis trianguli ad latus.

Corollarium 3^m^

Est etiam $R = \int \frac{y\partial y^2}{m\partial x}$; siquidem normalis $m = \frac{y\partial s}{\partial x}$.

In circulo autem $m = a$, proterea

$$y\partial y^2 = \frac{\overline{a-x}^2 \partial x^2}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

Ergo ibidem est

$$R = \int \frac{\overline{a-x}^2 \partial x}{a\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Problema 2^{dum} +

Invenire resistentiam a fluido homogeneo & quiescente opponendam solido revolutionis ipsum permeante?

Solvitr. Iisdem denominationibus ac antea servatis, erit semper actio obliqua fluidi in elementum superficiei solidi per revolutionem arcûs Mm generatum ad actionem directam ejusdem fluidi in idem superficiei elementum ut quadratum sinûs totius ad quadratum sinûs obliquitatis, proindè habebitur ut ante

$$\partial(R) = \frac{\partial(F)\partial y^2}{\partial s^2}.$$

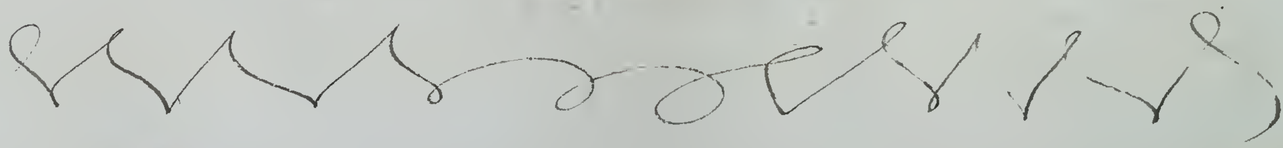
Sed hîc $\partial(F) = 2cy\partial s$.

Sic enim exprimitur convexa superficiei elementum;

Ergo $R = \int \frac{2cy\partial y^2}{\partial s}$,

seu normali introductâ,

$$R = \int \frac{2cy^2\partial y^2}{n\partial x}.$$



Corollarium 1m.

In ~~[illegible]~~ cono dabit hoc formula

$$R = \frac{b^3 c x^2}{a\sqrt{a^2+b^2}};$$

vel si fiat $x = a$,

$$R = \frac{b^3 c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Jam verò si fingatur conus fluidum trajicere non per apicem, sed per basim in istâ hypothesi resistentia debet esse $= b^2 c$;

Ergo $R : R' :: \frac{b^3 c}{\sqrt{a^2+b^2}} : b^2 c$

$:: b : \sqrt{a^2+b^2}$.

Corollarium 2dum.

In sphorâ, substituendo valorem $m = a \int + y^2 dy^2 = (a^2 - 2ax + x^2) dy$, inve=nietur $R = \int \frac{2c}{a}(a^2 dx - 2ax\,dx + x^2 dx)$

seu $R = 2acx - 2cx^2 + \frac{2cx^3}{3a}$.

Sit autem $x = a$; tunc $R = \frac{2a^2 c}{3}$.

Sed resistentia, quæ opponeretur sphæ=ro, si hoc trajiceret fluidum non con=vexitate promissâ, sed basi foret
$R' = a^2c$.

Est igitur $R : R' :: \frac{2}{3}a^2c : a^2c :: 2 : 3$.

Corollarium 3^m.

Si supponatur sphæra cylindro inscripta, resistentia quam experie=tur prior, cæteris paribus, erit ad resistentiam cylindro per alterutram basim flumen trajicienti oppositam :: 2 : 3, seu ut soliditas sphæræ est ad soliditatem cylindri.

Corollarium 4^m.

{Omitti potest hoc Corollarium.}

Cylinder semisphæræ inscriptus eandem experietur resistentiam, seu ~~alterutra basi~~ convexitate promissâ fluidum tra=jiciat, ac ipsa convexitas sphæræ.

Resistentia enim unius et semi=circumferentiis convexitatem anteriorem

hujus cylindri efformantibus; est $= \int \frac{\dot{y} dy^2}{m^2 dx}$.

Scholium.

Immotum hactenus supposuimus esse fluidum, quod corpori permeanti resisteret, nam si fluidum illud moveretur tunc difficile ~~adm~~admodum estimaretur resis=tentia.

Neque etiam rationem habuimus velo=citatum quibuscum corpora fluidum perme=arent, nec densitatis fluidi, nec hujus tenacitatis, quæ vulgò viscocitas appel=latur.

Quod si harum rerum, excepto tamen motu ipsius medii resistentis, consi=deratio admittatur.

Conclusio 8.ª

Corpus quod fluida quiescentia per=meat, resistentiam offendit suæ super=ficiei, quadrato suæ velocitatis, fluido=rum densitati necnon tenacitati analogam.

Demonstr. 1.º enim quo major est corporis superficies, eo plures simul in partes fluidorum occurrit; Ergo

partes eò plures dimovendas habet. Sed eò major est resistentia, quò plures partes sunt dimovendæ, ut patet. Notandum tn est eandem hìc supponi inclinationem directionis, cui insistit corpus rsptu superficiei ipsius corporis.

2°. Quo major est corporis permeantis celeritas, eo vehementius in singulas fluidi partes incurrit; proinde eo majorem illis imprimit partem suæ velocitatis.

Pariter quo major est corporis permeantis celeritas, eo plures fluidi partes intra idem tempus offendit; quapropter cum partibus eo pluribus motum communicat suum.

Ergo resistentia corpori opposita, est in ratione duplicatâ ipsius celeritatis.

3°. Quo major est fluidorum densitas, eo plures partes sub eodem volumine obviæ sunt corpori subeunti; Ergo &c.

4°. Quò major est fluidorum tenacitas, eo difficilius eorum partes à se invicem separantur. Ergo &c.

Corollarium.

Continuò igitur retardatur motus corporis medium subeuntis. Quâ lege autem id fiat, difficulter admodum definiri potest.

Si corpus medium trajiciens, causæ cuidam accelatrici subjiciatur, crescit continuò medii resistentia; atque ita crescere potest, ut corporis motus ferè æquabilis fiat.

Exposuimus hactenùs Hydrodynamicæ elementa. Nunc præcipua Hydrostaticæ principia tradenda sunt.

Paragraphus 7us

De Aquilibrio fluidorum.

Fluida vel solidis obnituntur vel fluidis. Agemus 1º de Aquilibrio liquidorum cum Solidis; tum de Aquilibrio fluidorum inter se.

Conclusio 1ª

In transitu obliquo medii rarioris in densius, corporis motus refrangitur accedendo ad lineam superficiei parallelam; in transitu autem et medio densiori in rarius, refrangitur motus versus lineam ppendicularem.

Demonstr. 1ª pars. ~~In ocean~~ Dum corpus obliquè incurrit in medium per meâtu difficilius, tunc percutit medium per vim suam perpendicularem. Nisus autem parallelus est juxta fluidi superficiem; Ergo si vis parallela sit continuò major quam perpendicularis, jam versùs parallelam refractio est facienda; siqdm corpus magis accedere debet directionem vis fortioris: Atqi vis parallela fit continuò major

quam perpendicularis. Fluidum enim nisui perpendiculari resistit secun=
=dum totam immersi hemisphærii superficiem: nisui autem parallelo non resistit nisi secundum ejus ~~hem~~ superficiei semissem; Ergo nisus perpendicularis continuo ma=
=gis imminuitur qam parallelus; adeoq vis parallela continuo ma=
=jor quam perpendicularis evadit. Ergo versus lineam medio subeundo parallelam contingere debet refractio.

Demonstr. altera Pars: Propter oc=
=cursûs obliquitatem medium facilius per vim perpendicularem, difficilius autem per vim parallelam premitur; Ergo vis parallela magis imminu=
=enda est qam perpendicularis, corpus ergo ad directionem perpendicularis vis continuo magis debet accedere; Ergo cum corpus ex medio difficiliori in medium facilius subit, tunc motus corporis refrangitur versus lineam novo medio perpendicularem. Ergo &c

Corollarium 1.^m

Si corpus perpendiculariter in=
=currit in fluidi superficiem, tunc
nulla est refractio.

Corollarium 2.^dum

Hinc intelligitur cur, is, qui piscem
mediis in aquis catapultâ ferire
vult, debeat infra piscem dirigere
globum; globus enim refractione
elevatus est.

Corollarium 3.^m

Motus corporis ex medio faciliori
in difficilius transeuntis, atq post
unam refractionem medium adhuc
difficilius subeuntis iterum refran=
=gitur versus lineam parallelam. Sicq
si in media continuo difficiliora
transeat, curvam descripturum est,
cujus convexitas mediorum difficilio=
=rum superficiem respiciat. Curva

istius naturam in variis casibus inquisiêre Newtonus, aliiq Geometræ.

Conclusio 2da.

Si corpus totum immergitur fluido, 1° undiq comprimitur; 2do. eò comprimitur magis, quò altius immergitur, & quò densius est fluidum.

Demonstr. 1°. enim fluida pressionem suam quaquaversus exerunt; Ergo &c

2do. quò altius immergitur corpus, eò major est, basi eâdem remanente, altitudo fluidi superincumbentis; Ergo &c.

3°. quò densius est fluidum, eò plures partes simul incumbunt corpori immerso. Ergo &c

Conclusio 3^{a}.

Corpus solidum ejusdem gravitatis specifico ac fluidum, cui immergitur, 1°. assignatum sibi in fluido locum servat; 2do mergitur totum, si in superficie fluidi depositum fuerit, sicq ad libellam fluidi manet suspensum.

 Demonstr. 1ª Pars: Solidum dicitur esse ejusdem gravitatis specificæ, quod pari volumini fluidi pondere æqui=pollet. Atqui tale solidum quemcumque locum servat, in quo fuerit constitu=tum; tunc enim perinde est ac si par volumen fluidi locum suum oc=cupare non desineret. Atqui istud fluidi volumen immotum consisteret; Ergo pariter &c.

Demonstr. 2ª Pars: Cum supra liquoris superficiem corpus deponitur, gravior efficitur columna ipsi subjecta. Ergo collaterales attollit suæ pressionis excessu, donec omnes in æquilibrio constitutæ sint. Atqui non possunt omnes columnæ æquilibrium assequi, nisi immergatur omnino corpus summo impositum fluido. Cum enim omnes columnæ eandem habeant basim, non possunt æquilibrari inter se, nisi sint æqui-altæ; ut autem fiant æqui-altæ, corpus immergi totum necesse est. Ergo &c.

Semel porrò immersum nulla vis pergit deprimere, sed perfectum est equilibrium velut anteà. Ergo &c.

Conclusio 4.ª

Corpus specifice gravius fluido descendet intra fluidum, tantamq sui ponderis partem amittet, qantum ponderat par volumen fluidi.

Demonstr. 1.° Corpus est specifice gravius fluido, qdo plus ponderat qam par volumen fluidi; ~~Atqui par columna~~ Atqui tunc debet intra fluidum des=cendere. Cum enim plus ponderat qam par volumen fluidi, tunc columna sibi subjecta fortius premit; Ergo columna illa deprimi & collaterales attollere debet; Atqi deprimi o potest columna corporis subjecta, quin des=cendat corpus in superficie fluidi depo=situm. Siqdm ea columna corpus sus=tinebat; Ergo corpus specifice gra=vius descensurum est intra fluidum,

April 24. 1788.

178. Demonstr. 2°. Corpus immersum fluido eam amittit ponderis sui partem, qam sustinet fluidum; Atqi fluidum par=tem æqualem sub eodem volumine sustinet. Eam enim ponderis partem fluidum sustinet, qæ cum cæteris co=lumnis æquilibratur, quæ cum pari volumine fluidi æquiponderat; Ergo corpus tantam amittit ponderis sui partem, qantum ponderat par volu=men fluidi.

Corollarium 1m.

Corpus majorem ponderis sui partem in fluido graviori qam in leviori amit=tit. Sic globus plumbeus in spiritu vini plus qàm in aquâ vulgari pon=derat.

Hinc intelligitur causa ob qam navis altius in fluvio qàm in aquis marinis immergatur. Est enim aquæ marinæ majus qàm fluvialis pondus.

Corollarium 2dum.

Corporum in fluidis homogeniis æquiponderantium rumpi æquilibrium necesse est, si fluido leviori vel gra=viori alterutrum immergatur.

Corollarium 3.m

Specificæ gravitates fluidorum sunt ut partes ponderis ab uno eodemq corpore in iis fluidis amissæ. Pars enim ponderis a corpore amissa in fluido, æquatur ponderi paris volu=minis fluidi. Hinc facile solvitur problema usitatissimum, nempe spe=cificas fluidorum gravitates cognos=cere. 1.o enim corporis solidi æstime=tur pondus in aere libero; 2.do variis dein fluidis corpus idem immergatur, noteturq quantum in singulis sui amiserit ponderis. Partes ponderis amissæ fluidorum gravitates spe=cificas exhibebunt.

Conclusio 5.a

Corpus in superficie fluidi specificè gravioris depositum, tamdiu immergendum est

 quamdiu pondus fluidi ejusdem voluminis ac pars corporis immersa, non adaequabit pondus ipsum totius corporis.

Demonstr. Corpus fluidi columnae im=
=positum auget ipsius gravitatem. Hoc itaque deprimitur, vicinaeque interim attol=
=luntur, donec restituatur aequilibrium; atque non restituitur aequilibrium, nisi post=
=quam fluidum parte immersâ corporis depulsum, ac consequenter ejusdem volu=
=minis cum illâ parte aequavit pondus omne ipsius corporis. Ut enim aequilibrium restituatur, parem esse oportet colum=
=narum omnium gravitatem, quod quidem non accidit, nisi quando pondus fluidi voluminis ejusdem ac pars corporis immersa to=
=tius corporis ponderi aequale est. Ergo &c.

Conclusio 6.ª

In tubis communicantibus (excipiendi sunt tubi capillares) aequilibrium est inter liquores homogeneos, quando ad libellam componuntur; vice versâ iidem ad libellam componuntur, quoties est aequilibrium.

Demonstr. 1a Pars. qdo ad libellam componuntur liquores homogenei, tunc æquales st eorum altitudines; qdo vero communicantes st tubi, tunc æquales sunt bases, per qas in se mutuo agunt liquores; Atqi æquilibrium est, quoties æquantur tum bases, tum altitudines, Ergo &c —

Demonstr. 2a Pars: Ex hypothesi æquilibrium est inter liquores homogeneos: Ergo G = g; Ergo etiam AB = ab; seu ob tuborum communicationem est B = b; Ergo A = a, id est, datur libella.

Scholium.

Ab eâ lege excipi diximus tubos capillares, id est, quorum capacitas vix capillum admitteret, in iis enim tubis longe alia eveniunt phenomena; V: G: aqua supra libellam assurgit, hydrargirium infra libellam consistit. Porro eorum phenom: enumerationem & explicationem variis ex operibus collegit De la Lande 2do Ed: D: 1772.

Corollarium.

Ex Conclusione 6â intelligitur causa phenomenorum, qæ in aquis salientibus observantur. Viz cum ad libellam proprio pondere componuntur liquores homogenei, o possunt aquæ ex receptaculo effluentes, quin totâ suâ vi nitantur ad eam altitudinem ascendere, ex qâ delapsæ fuerant. Itaq totum jactuum aquæ artificium huc redit; paratur in loco sublimi receptaculum inde in locum humiliorem aqua defluit per tubum verticalem aut inclinatum. Hic verticaliter erigi solet tubulus, per qem aqua possit effluere: unde illa prosilit ad altitudinem eô circiter quò altius fuerit receptaculum.

Conclusio 7ª

Liquores heterogenei in tubis communi=
=cantibus inclusi æquilibrium assequun=
=tur, qdo altitudines obtinent suis densi=
=tatibus reciprocas, & vice versâ. —

Demonstr. 1ª Pars: Tunc est æquilibrium
qdo æquantur utrinque pressiones, ac
proinde qdo excessus altitudinis in li=
=quore rariori compensat excessum
densitatis in altero: Atqui cum alti=
=tudines sunt in rone densitatis in=
=versâ, tunc excessus altitudinis in
rariori liquore compensat excessum
densitatis in altero. Ergo &c. —

Demonstr. 2da Pars: Si enim inter
liquores heterogeneos æquilibrium est,
tunc æquantur utrinque pressiones; —
Atqui liquorum heterogeneorum pressio=
=nes æquari ō possunt, quin sint alti=
=tudines in rone densitatum inversâ,
æquari enim nequeunt illæ pressiones,
quin excessum densitatis in uno com=
=penset excessus altitudinis in altero;
Atqui compensatio illa fieri nequit,

quin sint altitudines in raone inversâ den=
=sitatum; Ergo &c

Corollarium 1.^m

Ad æquilibrium requiritur pariter ex
æquilibrio supposito consequitur esse
altitudines in raone directâ volumi=
=num & inversâ molium. Debent enim
esse altitudines in raone densitatum
inversâ: Atqi densitates sunt in raone
directâ molium, & inversâ voluminum;
Ergo &c.

Corollarium 2.^m

Inde sequitur methodus diversorum
liquorum densitates inter se comparandi;
siqdm altitudo unius supra libellam ex=
=hibet excessum densitatis in altero.

Conclusio 8.^a

Ascensus & suspensio liquorum intra
tubos & anthlias oritur ex pressione ae=
=ris superincumbentis.

Demonstr. Ea est vera effectûs
causa, quâ positâ effectus item poni=
=tur, quâ variatâ eâdem proportione vari=
=atur effectus, quâ demum sublatâ ef=

=fectus quod tollitur. Est enim, ut ~~ut~~ diebat Newtonus, causa ejusmodi vero causo simillima; jam vero aeris pressio in subjectos liquores ita se habet. ~

1°. qdm positâ aeris pressione liquo=res ascendunt. Aer enim gravis est ut experimenta comprobant; Ergo subjec=tum liquorem premit; Atqui liquor aere pressus debet ascendere intra tubum aere vacuum ipsi proxime admotum atq in illo suspensus rema=nere. Namq solent liquores ex aliquâ parte compressi illuc effugere, ubi minor est resistentia, sed in tubo aere vacuo minor est resistentia; Ergo li=quor influere in tubum, ibiq suspen=sus ad qamdam altitudinem manere cogitur. Idem quod experientiâ decla=ratur, Viz. in recipiente machino pneumatico, in quo liquores subducto aere intra tubas attolluntur, & suspen=duntur.

2°. Mutatâ aeris pressione, mutatur liquorum ascensio. Mutatur enim pressio aeris, cum mutatur columnæ aeris superincumbentis altitudo; Atqi cum

ista altitudo variatur, ascensio etiam fit diversa. Liquores enim altius ascendunt, si tubus constituatur ad pedem montis, quam si in vertice, ut primum a Pierio observatum est, saepiusque ab aliis deinceps, ac nominatim non ita pridem a quibusdam e nostris, qui Globis Aerostaticis viam ad sidera tentaverunt.

#. Et vero experientia docet, si tubus Toricellianus intra Recipientem machinae pneumaticae sit constitutus, altitudinem mercurii in eo suspensi remittere toties & eadem proportione, quot fiunt aeris ejectiones; iterumque elevari quoties & qua proportione rursus immittitur; Ergo &c.

3°. Aeris pressione sublatâ, tollitur suspensio liquorum. Si enim tubus Toricellianus, cum vase hydrargiri stagnantis sub Recipiente machinae pneumaticae ponatur, constat experimento ubi primum exoritur aer, statim pondere suo hydrargirum decidere. Ergo &c.

Scholium.

Olim Ignota prorsus erat ascensionis hujus & suspensionis causa. Tribuebant enim illam Veteres Horrori cuidam a vacuo,

quem naturæ insitum esse putarunt.

Anno 1642 hortulanus quidam magni Etruriæ Ducis observavit in anthliâ aspirante aquam non supra octodecim cubitos attolli. De quâ re admonuit Galilæum. Is repetito experimento statim ~~statim~~ intellexit o ~~non~~ adeo Naturam abhorrere à vacuo, verùm claram & apertam liquorum ascensionis & suspensionis rationem o reddidit Galilæus ipse, sed Toricellius Galilæi Discipulus. Hic tubum vitreum longitudine trium pedum parte unâ Hermeticè clausum, alterâ apertum implevit hydrargiro, tum tubo in vas hydragiro plenum, quâ patebat, immerso, mercurium vidit ad altitudinem 28 fere Pollicum subsistere; deindè experimentis sæpius iteratis, conclusit in opere Anno 1643 edito, ex aeris pressione phænomenorum similium causam esse repetendam.

Corollarium 1m

In Anthliis aqua o ascendit ultra 32 pedes. Hinc sequitur pondus columnæ

aeris æquè altè ac Atmosphera, esse majus pondere columnæ aquæ ejusdem basis & Altitudines 32 Pedum ——

Corollarium 2^{m}.

Eo minus altè hydrargirum quam aqua attollitur, quò hydrargirum aquâ gravius est. Ex eo igitur quod expertus est Toricellius hydrargirum ad 28 pollices elevari atq. suspendi, sequitur totius columnæ aeris pondus idem esse ac pondus columnæ hydrargiri ejusdem basis, altitudinis autem circiter 28 Pol:

Corollarium 3^{m}.

Hinc concludendum est ope tubi aere vacui variorum liquorum densitates, seu gravitates specificas, posse æstimari. Quippe eo specificè gravior liquor habebitur, quo minorem in prædicto tubo altitudinem obtinebit, datâ aeris pressione, hoc est, sub eâdem cœli temperie: ——

Quæres 1º. Quare manus tubum Toricellianum sustinens pondus ferat columnæ

liquidi aeris pressione suspensi? —

Resp. Manum ipsius liquidi pondus negaqum ferre; cum istud sustineatur aere extrinsecus premente; sed pondus alterum huic aequale, aeris viz. summo tubo desuper incumbentis. Haec enim aeris columna eâdem est altitudine ac columna innixa liquido stagnanti, & liquidum in tubo elevans, sustinensq. Altitudo siqdm utriusq columnae non differt a totâ altitudine Atmospherae; quamvis ea, quae summo tubo insidett, brevior sit paululum. Columna autem liquidum attollens, cum liquido ipso suspenso aequilibratur, remanet igitur sola aeris columna superior ab eo, qui tubum sublevat sustinenda. —

Quaeres 2do. Quare multoties singulis anni tempestatibus, legeq prorsus inconstanti varietur apud nos, & in regionibus ad Polum sitis Barometri altitudo, dum inter Tropicos eadem fere per totum annum consistat? —

Resp: Hujus phaenomeni causam ex vario aeris habitu esse repetendam. Neq enim aer in nostris regionibus, multo minus in iis quae magis ad Polum

vergunt, toto anni tempore æqualiter temperatur; sed variis de caussis, ac prorsùs incertâ lege illius pressio mutatur. Variatur enim calore & frigore, tum erumpentibus interdùm ex terræ sinu vaporibus, iisdemq postmodùm recedentibus; demùm & præcipuè ventis, qui modò flant ab imo sursum, modò ex summo deorsùm, nunc vago multiplicique feruntur cursu, nunc leniter aspirant, nunc magno impetu ruunt, inter seq deprœliantur, &c.

Verum aliter res geritur intra Tropicos. Ibi enim ferè semper idem cœlum, eademq aëris temperies manet. Sed prætereà in illis plagis flat perpetuò Eurus, nullâ propè varietate. Unde &c —

Quæres 3°. Quare major sit Barometri altitudo, cæteris paribus, hyeme qam æstate, manè quam meridie, & generatim cùm tempus est gelidum.

Resp: Aerem frigore condensari, dilatari autem calore; proinde sub tempore gelido densiorem fieri, ideòq graviorem columnam quâ hydrargirum suspenditur. Itaq non mirum est

190. refrigerato aere altius qàm tepefacto vel calido mercurium assurgere.

<u>Quæres 4º</u>: Ob qam causam sereno tempore ascendat Barometrum, pluvi=
=oso autem descendat?

<u>Resp</u>: Tunc Mercurium ascendere oportere, cum pressio aeris augetur, tunc verò descendere, cum ista pressio minuitur; Atqi majorem esse aeris pressionem tempore sereno, qàm plu=
=vioso. Quippe cum siccus, serenusq est Aer, vapores qàm plurimi sub Sole ex terrâ attolluntur, & ipso aëre sustentantur. Tunc igitur nativo aeris pondere, pondus istorum vapo=
=rum adjungitur. Proterea tum aër tranquillus solet esse & ventis pa=
=rùm agitatur; cum ergo ex unâ parte augetur illius pondus, ex tum alterâ vix aut parum minuitur.

Contrà autem pluvioso tempore decidunt vapores, qbs concretis nubibus, vel passim per aëra sustentati, ingentiq onere hoc pacto Atmosphera liberatur, proinde leviores fiunt singulæ aeris columnæ. Sed proter decidentem imbrem

alia causa ē proteruenda imminuit gravi=
=tatem aeris. Pluviae enim quasi nuncii
praeeunt venti, seu prope tellurem tumul=
=tuantur, seu in altioribus cientur Atmos=
=pherae regionibus. His porrò variè permo=
=tus aer gravitate suâ partim exuitur,
cùmq aeris moles ventis acta diffugiunt,
minor profectò in mercurium stagnan=
=tem pressio debet exerceri, mercuriusq
tum in Barometro humilior esse. Atque
ob hanc alteram causam saepè accidit
multò ante pluviam ipsam Barometrum
descendere; itemq in Septentrionalibus
plagis plus deprimi pluvioso tempore
quam versus Aequatorem; ibi enim non
semel observatum est quantitate ad=
=modum exiguâ etiam inter ingentes
pluvias mercurium deprimi.

Quaeres 5°. Quare intra cubiculum
clausum Mercurius aequalem obtineat
altitudinem, ac in campo aperto, quamvis
longè breviores sint in cubiculo aeris
columnae?

Resp: Vel communicationem esse
aliquam aeris interioris cum exteriore,
vel nullam. In utrâq autem hypothesi

eandem prorsus esse pressionem aeris tum interioris tum exterioris. Nam 1º fluidorum communicantium ea conditio est, ut, cæteris paribus, æqualiter premant; si ergo aer cubiculi communicet cum aere reliquo, ∘ minus comprimitur, nec proinde minus debet mercurium attollere. 2º Si cubiculum ita est clausum, ut nullus aeri exteriori relictus sit halitus, tunc quod ex gravitate ∘ habet, saltem ex elaterio recipit; cum enim anteà aer uterque conjunctus & consociatus fuerit, elaterium utriusque æquè tensum manet, etiam societate interruptâ, nimirum ob parietes cubiculi, quibus interior aer in eodem semper statu retinetur. Ergo &c.

Problema Iᵐ.

Invenire pondus Atmosphæræ?

Solvitur. Quolibet columna aeris cum columnâ hydrargiri ejusdem basis, altitudinis autem 28 pollicum $= \frac{7}{3}$ Ped. æquilibratur. Ergo stratum hydrargiri altitudinis $\frac{7}{3}$ Ped. quo cingeretur tellus pondere æquaret totam Atmospheram.

Sit telluris radius $= r$; radius sphera totius ex tellure & hydrargiro conflata $= r \frac{7}{3}^{Ped} = b$. Sumatur nunc radii ad peripheriam ratio $= \frac{1}{6}$. Erit totius sphera circumferentia $= 6b$, soliditas $= 4b^3$; soliditas autem telluris $= 4r^3$. Ergo moles hydrargiri tellurem ambientis erit $= 4b^3 - 4r^3$. Sit pondus unius pedis hydrargiri $= p$, (est autem pes cubicus hydrargiri 947 librarum); habebitur pondus Atmosphera $= 4p(b^3 - r^3)$.

Problema 2^m.

Datâ recipientis capacitate, anthlia apposita, definire quot fieri debeant aëris ejectiones, ut in machinâ pneumatica relinquatur aëris quantitas $= \frac{1}{n}$ Recipientis?

Solutio. Sit cum Recipientis tum anthlia capacitas $= 1$; sit autem capacitas solius anthlia $= \frac{1}{b}$. Post primam ejectionem remanebit in Recipiente $1 - \frac{1}{b} = q$.

Secundam qantitatem ejiciendam

dabit illa proportio $1 : \frac{1}{b} :: q : \frac{q}{b}$.

Jam residuum erit in machinâ pneu=
=maticâ $q - \frac{q}{b} = q\left(1 - \frac{q}{b}\right) = q^2$.

Similiter invenietur post tertiam ejec=
=tionem residuum fore q^3;

demum erit $q^x = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{n}$;

quapropter $q^{x-1} = \frac{1}{n}$, tum $x\, l.q - l.q = -L.n$;

Unde ——— $x = \frac{L.q - L.n}{L.q}$ ————

Corollarium.

Vicissim datis x & q, invenietur n; datisq x & n, invenietur q, seu capacitas recipientis.

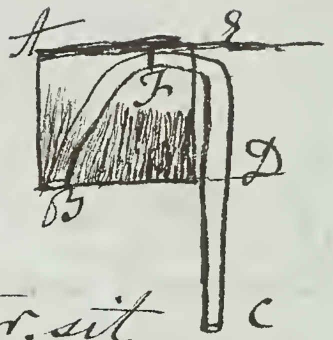
Scholium.

Conclusio octava causam affert mul=
=torum phænomenorum, qualia sunt illa;
1.° cur duo marmora bene lævigata diffi=
=cillime separari queant juxta directio=
=nem faciebus sese contingentibus perpen=
=dicularem, facile autem divellantur
juxta directionem parallelam. Idem
dicendum de duplici hemisphærio Magde=
=burgensi; ita vocatur qod celebre istud expe=
=rimentum Magdeburgi primum tentatum sit.

2°. qare liquor non effluat ex doleo perfecte pleno & inferius aperto, nisi fiat in parte superiori foramen. — 3°. Cur in vase mediocri liquor maneat suspensus, etsi invertatur vas, si ori ejus applicetur charta; idq evenit, sive ad summum usq plenum liquore vas fuerit, sive tantum ex aliqua sui parte. In priori quidem hypothesi rem ita obtingere debere statim intelligitur; in altera autem res paulo diffi=ciliori explicata est. Cum enim inverso vase, aer intra vas maneat summo liquori insidens, videtur iste ob elaterii vim, cum exteriori aere aequilibrari posse, proptereaq liquorem suopte pondere permissum iri. Verum eva=nescet ista difficultas, si considerentur duo: primum etsi liquor omnis non effluat, semper tamen evadere guttas aliquot: secundò chartam margini basis non perfecte & prox=ime adhaerescere. Descendit itaq liquor paululum in inverso vase. Porro hinc aër interior paulò magis extenditur, unde minor fit ipsi elaterii vis; atq suspensus haret liquor per excessum pressionis ex aere externo oriundo. —

4°. Cur si cuidam liquori immergatur crus brevius tubi incurvati, qui vulgo dici=tur Scypho, statim atq eductus fuerit aer, liquor per crus longius effluat. Nimirum ob pressionem aëris liquori incumbentis, partem Scyphonis B F liquor ingreditur; qia autem

196. pars altera FC aere vacua supponitur, nihil est qod obstet ejusdem liqoris lapsui juxta FC; proinde hunc exire oportet. Ut istud paulò enucleatius explicetur, sit pondus columnæ äeris, cujus pressione liquor attollitur intra tubum ad altitudinem $AB = p$. Sit F vis illius columnæ ad liqorem susti=nendum impensa; sitq f vis alterius colum=næ äeris orificio C respondentis impensa ad impediendum liquoris lapsum. Erit primum $F = p - AB$; siqdm pondus ab=solutum columnæ liquidum attollentis, ipsius elevati liquidi pondere minuitur totâ quantitate AB.



Vis autem resistens f erit $= p - EC$; siqdm istius columnæ resistentis pondus absolutum per gravitatem liquidi ex F in C pertinentis imminuitur totâ qantitate EC.

Ergo ..... $F - f = EC - AB = CD$.

Si autem foret $EC = AB$, seu $CD = 0$, foret tunc $F - f = 0$. Ex quo intelligitur excessum vis columnæ äeris prementis su=pra vim columnæ resistentis eundem semper esse ac excessum unius cruris Scy=phonis supra alterum; proinde toties liquo=rem effluere qoties immersum crus brevius est altero, et eò celerius quò idem bre=vius est respectu alterius cruris;

sequitur etiam, si duo crura æqualia fuerint, liquorem pervenire q̄dm posse ad orificium syphonis, sed ultra exire ō posse. —

Hactenus de fluidorum Æquilibrio & Motu Theoriam brevem exposuimus; cætera autem, temporis brevitate id postulante, omittimus, alteram 2.da Sectionis divisionem continuò aggressuri, quæ cùm sat fusa sit, sectio etiam ipsa jure dici potest.

Sectio 3.ª

De

Corporibus cœlestibus.

Astronomiæ elementis mox tradendis, necessariam de variis temporum periodis ac mensuris promittere juvat notionem

De

Variis Temporum mensuris.

Præcipuæ temporis mensuræ sunt, Dies, Mensis, Annus, & Cycli diversi, quos in usus varios excogitavêre Chronologi.

Die Aprilis 30.º A.º 1788.

Definitio 1ª

Dies est illud temporis intervallum, per quod Sol semel videtur ab Ortu in Occasum circa tellurem revolvi. Solet hoc intervallum in partes 24 æquales dividi, quæ Horæ dicuntur.

Hujus porrò exordium intervalli non est idem apud oēs Gentes. Baby=lonii enim ab ortu Solis, Athenienses, & Itali & Germani pleriq ab occasu Solis, Galli & Angli mediâ nocte, Astronomi demum à Meridie inchoant Diem. Fecit hoc Diei inchoandi varie=tas, ut horæ distinguerentur aliæ Babylonicæ, aliæ Italicæ, aliæ Gallicæ, aliæ demum Astronomicæ.

Definitio 2ᵈᵃ

Mensis solaris est illud spatium, per quod Sol unum Zodiaci Signum percurrere videtur ab occasu in ortum.

200. Incipit hic Mensis, Die circiter 21°. cujusq Mensis civilis.

Definitio 3ª

Mensis lunæ synodicus est tempus illud quod à novi-lunio ad novi-lunium subsequens elabitur. Hic Mensis habet 29 Dies, 12 horas, 34 minuta. In usu tn civili Menses lunæ synodici alternis vicibus, 29 & 30 dies obtinent.

Definitio 4ª.

Annus Julianus sic à Cæsare Julio dictus, est amplexio dierum 365 & 6 horarum. Jam verò ista 6 horæ non singulis annis numerantur, sed per 4 annos asservantur, quarto demum adjiciendæ; unde quartus hic annus constat diebus 366; Dies verò istoc inseritur inter 23um & 24um Februarii Diem; sicq illo anno bis dicitur, Sexto kalendas Martii, (Vide infra Def: 13m); unde annus idem Bissextilis appellatur.

Definitio 5ª

Annus Solis periodicus est illud tempus, quod ab uno Æquinoctio ad alterum ejusdem tempestatis Æqui=noctium effluit; V: G: ab Æquinoctio verno ad Æquinoctium vernum prox=imè subsequens. Annus ille Dies complectitur 365, cum 5 horis, 49 min. circiter. Hinc patet istum Solis annum esse 11 minuta circiter anno Juliano breviorem.

Scholium

Discrimen illud anni civilis ab Astronomico ita lapsu temporis creverat, ut anno 1582° Gregorio 13° Pontifice annus ~~[illegible]~~ Julianus oiò Diebus 10 Astronomicum superaret. Hinc fiebat ut Æquinoctia vernum & au=tumnale o circa 21m Martii ac Septembris Diem tunc computarentur, sed circa 11m. Intererat autem Ecclesiæ Catholicæ hunc errorem emendasse. Concilium namque Nicænum decreverat Pascha celebran=drum esse Dominicâ Die subsequente

id plenilunium, quod aut ipsâ die Aequi=
=noctii verni, aut proxime post Aequi=
=noctium idem contingeret. Hâc de causâ
Gregorius 13.us, ut Aequinoctium vernum
in diem Martii 21m restitueretur, quem=
=admodum tempore Concilii Niceni, id est,
Anno 328°. obtigerat, jussit ex anno 1582°.
detrahi decem dies. Unde in Italiâ pri=
=mum loco diei 5.a Octobris, numerata
est dies 15.a; in Galliâ dein loco diei
10.a Decembris numerata est dies 20.a

Obiter observato novam hanc tem=
=pora computandi raonem Gallicè vocari
Noveau Style, Julianam vero, Vieux Style;
totumque discrimen utriusque esse dierum
decem.

Ne autem similis error (qui 1 diei
per annos circiter 112 efficitur) postquam
in Calendario Gregoriano esset correctus,
iterum deinceps irreperet, statutum fuit
ut 400 quibusque annis tres Bissextiles
tollerentur; sic annus 1600 remansit
annus Bissextilis; anni autem 1700,
1800, 1900 ad communes redacta sunt.

Problema 1.^{m}

Definire an Bissextilis sit annus quidam propositus?

Solvit.^{r} Cum Bissextilis sit 4.us quisq annus, patet dividendo propositum annum per 4, si tunc Quotus sit integer, Bissextilem esse ipsum annum propositum; si quod vero reliquum sit, quot residui sunt anni, tot effluxisse ab anno Bissextili; sic v: G: hic Annus 1788 per 4 divisus dat quotum integrum 447; est igitur Bissextilis.

Quod si de secularibus annis quaestio ageretur, tunc Bissextilis foret annus, quoties numerus propositus per 400 accurate dividi posset; secus vero esset communis. Sic communis erit 1800.us hoc est, dierum 365.

Definitio 6.^{a}

Annus Lunaris est complexio 12 mensium Lunae synodicorum. Itaque annus ille 354 dies, 8 horas, 49 minuta,

circiter complectitur. Deficit conse=
=quenter annus idem ab anno Juliano,
D H M
10, 21, 11; seu 11 circiter diebus. Annus
itaq Lunaris diebus circiter 11 citius
desinit qam Julianus. Unde pleni=
=lunia quotannis, 11 circiter diebus
citius qam procedenti anno celebrantur. Porro dies
illi & horae deficientes, si per aliqot
annos colligantur, Mensem lunarem
efficiunt, adeoq tunc anno lunari
additur Mensis unus, qamobrem tunc
lunaris annus constat ~~12~~ 13 mensibus
lunaribus. Hâc ratione anni lunares
ad aequalitatem cum solaribus redu=
=cuntur. Annus autem uno Mense auctus,
dicitur Intercalaris, sive Embolicus.

Definitio 7.ª

Numerus aureus seu Cyclus lunaris est
productus 19 annorum lunarium, quorum 12
sunt communes, & 7 intercalares, seu periodus
lunationum 235, quâ peracta novilunia & pleni=
=lunia ad eosdem ferè anni Juliani dies re=
=deunt. Ideo autem numerus iste ~~numerus~~ aureus est
dictus, quod illius anni apud Athenienses notis
aureis designari solerent. ———

Problema 2^dum.

Invenire numerum aureum anni pro=
=positi Erae vulgaris.?

Solvitr. Anno dato adjiciatur I, qui
e Cyclo lunari ante initium Erae efflux=
=erat; tum summa dividatur per 19. Nu=
=merus, factâ divisione, residuum erit
numerus quaesitus. Si verò reliquum est = 0
vel 19, erit ille = 19.

Scholium.

Quod si Cyclus lunaris cum Cyclo
19 annorum solarium conferatur, hoc
ille minor deprehenditur quantitate
1 H, 27 M, 32". Porrò inde fit ut post annos
solares 19, novilunia & plenilunia
prius contingant quam ante eosdem
19 annos, quantitate 1 H, 27 M, 32". Hoc
processio crescit in unum diem integrum
per annos 312, creveratque anno 1582°
in 4 dies solidos. Illo igitur anno novi=
=lunia & plenilunia indicabat numerus
aureus quatuor diebus priusquam por=
=rat.

Definitio 8ª

Epacta est excessus anni solaris, id est, 365^{D}, 5^{H}, 49^{M} supra communem annum lunarem, id est, 354^{D}, 8^{H}, 49^{M}. Est igitur Epacta annua dierum circiter 11. ———

Problema 3ᵐ

Datis anno Æræ vulgaris & numero aureo, invenire Epactam illius anni?

Solvitʳ. 1º. Si retineatur Juliana ratio computandi tempora, tunc numerus aureus ducatur in 11; productum, si fuerit < 30, erit Epacta quæsita; si fuerit > 30, dividendum erit per 30, tuncq numerus præter quotum residuus, erit Epacta Juliana. Hanc computandi rationem sequuntur Græci. ———

2º. Si Gregorianum Calendarium observetur, tunc ex producto numeri aurei per 11 subducatur numerus dierum, qbs varii passim anni breviores occurrunt, ex quo facta est Gregoriana reformatio, reliquum, ubi minus est

qàm 30, erit Epacta; ubi verò majus est, tunc numerus proter quotum resi=
=duus, erit Epacta quæsita. ——

Patet ab anno 1582.° ad annum usq 1700^m^ numerum ex producto subducen=
=dum, esse = 10; ab anno autem 1700.° esse 11. ——

Problema 4.^m^

Cognitâ omni datâ Epactâ, invenire ætatem Lunæ ad diem datum mensis civilis?

Solvit^r^. Addantur simul Epacta, numerus mensium à mense Martio elapsorum, numerusq dierum mensis propositi. Tunc si summa minor est qàm 30, eam ætatem Lunæ indicat; si verò major est, ejus supra 30 ex=
=cessus, erit ætas Lunæ quæsita. ——

Scholium.

Omni errore ō caret hæc methodus ætatem Lunæ definiendi. Rationem verò illum errorem corrigendi exposuit — Ozanam, natus Boligneux en Bress 1640, & mortuus est A: 1717 ætatis suæ 77. ——

Vide les Recreations Mathematiques d'Ozanam.

Problema 5.^m

Definire limites intra quos Pascha celebrari possit?

Solutio. Ex decreto Concilii Niceni Pascha celebrandum est Dominicâ proximè sequente plenilunium, quod accidit vel ipsâ Die Æquinoctii verni, vel quod Æquinoctium idem proximè subsequitur. Jam verò Luna potest esse plena die 21.ª Martii, id est, ipso die Æquinoctii verni, & simul ille dies potest esse Sabbathum, ut contigit anno 693; Ergo dies crastina, seu dies 22.us Martii potest esse Dominica ipsa Paschatis.

Deinde Luna potest esse plena Die 20.º Martii, ut contigit anno 1666.º Ergo ea Luna non est Paschatis; neque tunc Luna Paschatis incipiet, nisi 5.º Die Aprilis. Ergo plenilunium non erit, nisi Die Aprilis 18.º Porrò hic dies Aprilis potest esse Dominica;

Ergo Pascha non erit celebrandum, nisi Dominicâ subsequente, id est, post dies 7 ab 18°. Itaq Pascha o celebrabi=tur, nisi Die 25° Aprilis.

Quamobrem limites celebrandi Pas=chatis sunt dies Martii 22.us & Aprilis 25.us Hinc patet Pascha posse cele=brari D. 35. citius uno anno quam alio, sicut observatum est annis 1693° & 1666°.

Definitio 9.^{a}

Cyclus solis est periodus 28 annorum solarium, quâ exactâ, idem redit litte=rarum dominicalium ordo. Nimirum in calendario dies hebdomadis cujusq exhibentur litteris a, b, c, d, e, f, g; Ergo si hebdomadibus 52 accuratè con=staret quilibet annus, eadem littera eumdem hebdomadis diem semper indi=caret. At verò anni communes con=stant 52 hebdomadibus, & die unâ: Bissextiles autem hebdomadibus 52 & diebus 2, unde perturbatur litterarum ordo; neq nisi post annos solares 28 potest restitui.

Problema 6.^{m}

Dato Aera vulgaris anno, invenire an=
=num cycli solaris? ———

Solvit.^{r} Anno proposito adjiciatur 9, qui e cyclo solari ante initium Aerae effluxerant. Dividatur hoc summa per 28; si nihil erit residuum, concludetur annum cycli solaris quaesitum, esse = 28, si quid residuum sit, annus quaesitus residuo numero indicabitur. ———

Problema 7.^{m}

Invenire litteram dominicalem anni propositi?

Solvit.^{r} Ex Problemate 6.° facili operâ detegetur quis annus cycli solaris fuerit annus 1582.us; fuit nempe 23.us, cui numero respondet littera g in Calendario Juliano. Quoniam vero ex eo anno 1582 subducti sunt dies 10, littera g eodem anno repente in c mutata est. Itaque si loco g in Calendario Juliano ponatur c ad annum 23.^{m} cycli solaris, et ita deinceps immutentur caeterae litterae, prodibit Dominicalium tabula Gre=

=goriana. Jam in hâc tabulâ quæratur, quæ littera proposito cycli solaris anno respondeat; hæc vel unica vel duplex erit eo anno littera dominicalis.

Definitio 10.ª

Indictio Romana seu pontificia est spatium 3 lustrorum, hoc est, 15 annorum.

Instituta fuit anno 313.° Æræ vulgaris; annus ergo 312 ultimus fuit procedentis indictionis. Jam verò $\frac{312}{15} = 20$ cum residuo 12. Itaq incepit Æra vulgaris anno 12 alicujus indictionis, cujus Epocha fuit annus 3.us ante initium Æræ vulgaris.

Problema 8.m

Invenire quis indictionis annus anno designato Æræ vulgaris?

Solvit.r Designato Æræ vulgaris anno addantur 3 ex unâ indictione ante Æram elapsi. Tum summa dividatur per 15; numerus præter quotum residuus erit annus indictionis quæsitus.

Scholium.

Hanc raonem computandi tempora in actis publicis observari praeceperat Justinianus. Eamdem quoq suis in Diplomatibus etiamnum observant Romani pontifices.

Definitio 11.ª

Periodus Dionysii Exigui est spatium annorum solarium 532, quo elapso, novi=lunia & plenilunia ad eundem anni diem redeunt. Patet hanc periodum aequari producto cycli lunaris, qui 19 annorum est, in cyclum solarem, qui continetur annis 28; est enim $28 \times 19 = 532$.

Problema 9.ᵐ

Invenire quis annus periodi Dionysianae respondeat anno dato Aerae vulgaris?

Solvitʳ. Anno dato addantur 457, qui ex eâ periodo effluxerant ante ini=tium Aerae vulgaris. Tum dividatur summa per 532, numerus praeter quotum residuus erit annus quaesitus.

Problema 10^{m}.

Invenire quis annus Cyclorum Solis & Lunæ respondeat anno dato periodi Dyo=
=nysianæ? ———

Solutio. Dividatur annus periodi datus per 28. Numerus præter quotum resi=
=duus, erit annus quæsitus Cycli solaris. Quod si per 19 dividatur, numerus resi=
=duus quæsitum Cycli lunaris annum indicabit. —

Problema 11^{m}.

Datis Cyclorum Solis & Lunæ annis, annum periodi Dyonisianæ his respon=
=dentem invenire? ———

Solutio. Sit annus datus Cycli solaris = m; sit numerus annorum Cycli solaris = n = 28. Sit annus datus Cycli lunaris = a, hujusq Cycli annorum numerus = f = 19. ———

Jam inveniendus est numerus x, qui divisus per n relinquat m, præter quotum integrum z; qui verò divisus per f, relinquat a præter quotum integrum

ξ; ergo erit primum $\frac{x}{n} = \xi + m$; —
deinde verò $\frac{x}{f} = \xi + a$. —

Quod quidem problema indeterminatum esse liquet. —

Definitio 12ª.

Periodus Julii Schaligeri, quæ Juliana dicitur, est spatium annorum 7980, intra quod ne duo quidem anni eosdem habent numeros Cycli Solis simul & Lunæ, & Indictionis. Æquatur hæc periodus producto Cyclorum Solis & Lunæ, & Indictionis; siquidem $28 \times 19 \times 15 = 7980$.

Problema 12ᵐ.

Invenire quis annus periodi Julianæ respondeat anno proposito Æræ vulgaris? —

Solvitur. Anno proposito adjiciantur 4713, qui et eâ periodo effluxerant ante initium Æræ vulgaris. Tum summa dividatur per 7980. Si divisio fieri possit, numerus præter

quotum residuus erit annus quæsitus: sin fieri summæ divisio ō possit, erit ipsa summa annus quæsitus.

Problema 13^{m}.

Invenire quis annus Cyclorum Solis & Lunæ, & Indictionis dato periodi Julianæ anno respondeat?

Solvitr. 1º Dividatur annus periodi datus per 28; numerus residuus erit Cycli Solaris annus quæsitus:

2do Residuum divisionis per 19, erit numerus aureus;

3º Residuum divisionis per 15, erit annus Indictionis.

Problema 14^{m}

Datis Cyclorum Solis & Lunæ, & Indictionis annis, invenire annum periodi Julianæ his respondentem?

Solvitr. Sit Cyclus Solis $= n = 28$; Cyclus Lunæ $= f = 19$; Cyclus Indictionis $= g = 15$. Sit datus annus Cycli

solaris = m, datus annus Cycli lunaris = a; datus denique Indictionis annus = d. Patet problema eo redire, ut ~~...~~ detegatur numerus x, qui divisus per $\underline{n}$ relinquat m praeter quotum integrum ξ; divisus autem per f relinquat a praeter quotum ξ'; divisus demum per g relinquat $\underline{d}$ praeter quotum ξ''. Erit igitur 1° $\frac{x}{n} = \xi + m$; Ergo $x = \xi n + m$,

2° $\frac{x}{f} = \xi' + a$, seu $\frac{n\xi + m}{f} = \xi' + a$;

Ergo $\xi' = \frac{n\xi + m}{f} - a$. Unde prodibit valor quantitatis ξ', si quantitati ξ valor quidam ex arbitrio fuerit assignatus; est enim problema istud indeterminatum, sicut II.^{m}

3° $\frac{x}{g} = \xi'' + d$;

Sed jam erat $x = f\xi' + a$;

Ergo $\frac{f\xi' + a}{g} = \xi'' + d$;

Adeoque $\xi'' = \frac{f\xi' + a}{g} - d$.

Unde pro valore quantitati ξ assignato, cognoscetur ξ''. Cum igitur ex valore quantitatum ξ ξ' ξ'' pendeat problematis enucleatio, his

substitutis, erit solutum.

Definitio 13ª

Kalendæ sunt prima dies cujusq mensis. Nonæ sunt septima dies mensium Martii, Maii, Julii & Octobris, 5ª vero mensium reliquorum.

Idus sunt 15ª dies mensium prædictorum Martii, Maij, Julii & Octobris, 13ª vero cæterorum.

Porro solent Romani Kalendarum nomine dies illos designare, qui ab Idibus ad Kalendas subsequentes effluunt. Pariter Nonas dicunt illos dies, qui à Kalendis ad Nonas elabuntur. Demum dies illos, qui à Nonis ad Idus fluunt, Iduum nomine designant. Jam vero vulgaris dies mensium numerandi ratio facilè in Romanam rationem verti poterit, vicissimq Romana rao in vulgarem.

Nempè si dicant Romani, Octavo kalendas Junii, perindè est ac si dicerent, Die 24º Maii; si dicant, 7º Idus Maij, perindè est ac si dicerent,

216. Die 6ª Maii; si dicant, 3ª Nonas Aprilis, perinde est ac si dicerent, Die 2ª Aprilis.

Astronomiæ elementa.

Astronomia est scientia siderum. Alia autem sidera per sese lucida sunt, eundemq situm servare inter se viden=tur; alia mutuato ttm lumine corus=cant, nec eandem servant inter sese distantiam.

Quæ sunt prioris generis stellæ fixæ dicuntur, suntq huic nostro Soli si=millima. Stellarum numerus, quæ hactenus observatæ sunt, est ferè 5000.

Cætera verò solent Planetæ appellari, ad quam classem Cometæ revocantur.

Observatio 1.ª

Sidera videntur singulis diebus, id est, spatio 24 horarum circa tellurem revolli ab Ortu in Occasum.

Hinc 1º si mundus dividi concipia=
=tur in duo Hemispheria, alterum supe=
=rius, alterum inferius per circulum,
qui Horizon dicitur, sidera sunt
modò supra, modò infra Horizontem.
Poli Horizontis appellantur Zenith
& Nadir.

Sidus itaq in Zenith constitutum
spectatoris capiti imminet, & supra
Horizontem extollitur arcu 90. degres

Sidus autem in Nadir positum
pedibus subjacet Spectatoris, depri=
=miturq infra Horizontem eodem ~~arcu~~
arcu 90º graduum.

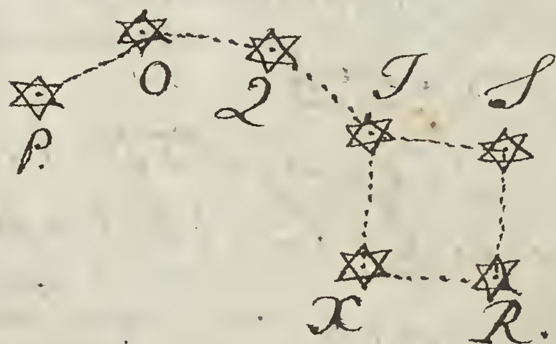
Facilè patet quoties mutatur
locus in superficie telluris, mutari
quoq Horizontem.

Hinc 2do intelligitur Axis qidam,
circa quem sidera communiter revol=
=vuntur, cujus directionem seu Polos
definire, Astronomorum æquè ac Geo=
=graphorum interest.

Porro si quis nocte lucidâ co=
=lum intueatur, is deprahendet con=
=geriem stellarum septem, quo ad

similitudinem rhedæ accedit, quam Astronomi Ursam majorem appellavêre.

Ex parte quâ convexa cauda est, juxta lineam, per duas stellas T, S caudæ ~~[illegible]~~ oppositas transeuntem proximè versatur stella insignis, quæ dici solet Stella polaris.



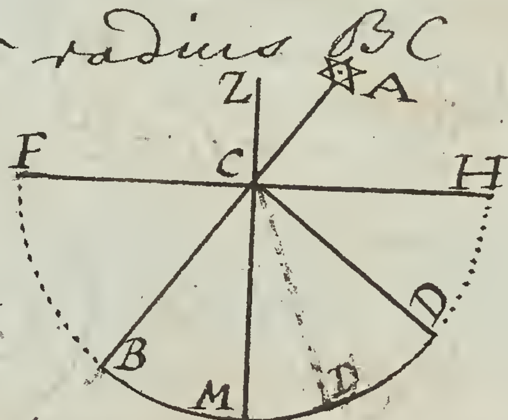
Huic proximus est Polus Borealis seu Arcticus; et opposito est Polus alter, qui vocatur Australis, seu Antarcticus. Jam verò inter circulos, ad quos Poli isti, adeoq totus Axis pertinet, maximus dicitur Æquator, Sphæramq mundanam in duo Hemisphæria dividi, Boreale & Australe; cæteris verò circuli utrinq decrescentes dicuntur Paralleli. Hos sidera describere videntur, alia in Hemisphærio Boreali, alia in Australi. Distantia cujusq Paralleli ab Æquatore æstimari solet arcu Circuli majoris supra Æquatorem & Horizontem perpendicularis. Circulus iste Verticalis seu

Meridiani nomen habet. —— 221.
Intersectio Circuli paralleli, quem sidus describit cum Meridiano, est punctum medium diurni cursûs, seu altitudo maxima supra Horizontem.

Problema 1.^m

Invenire altitudinem sideris supra Horizontem? ——

Solvit.^r Dirigatur radius BC Quadrantis Astronomici ad sidus A, arcus quadrantis MD dabit altitudinem Sideris. Est enim angulus BCM = ACZ; Ergo MCD = ACH; adeoq. arcus MD altitudinem sideris exhibet. ——



Problema 2.^dum

Invenire altitudinem Poli? ——

Solvit.^r Stella polaris A volvitur circa polum spatio 24 horarum; Ergo est semel in parte superiori

A circuli paralleli ad Æquatorem Æ 2; semelq in parte infe=riori B. Jam vero observata ejus altitudo in A, sit = 51°: altitudo in B = 47° uti Parisiis accidit. Semi=differentia altitudinis utriusq erit stellæ a Polo distantia. Ergo Poli altitudo erit PH = 47°+2° = 49°, vel PH = 51°−2° = 49°.

Corollarium 1.m

Altitudo Poli est complementum inclinationis Æquatoris supra Hori=zontem. Nam HPÆO = 180; sed ÆP = 90°; Ergo HP + ÆO sese mutuo com=plent. Hinc Parisiis inclinatio Æqa=toris est 41°.

Corollarium 2.dum

Æquatoris inclinatio æquat distan=tiam Poli ad Zenith. Est enim HZ = 90°.

Ergo PZ est complimentum arcûs HP. Porrò ÆO est quoq complimentum arcûs HP. Ergo PZ = ÆO.

Corollarium 3^m.

Distantia Æquatoris ad Zenith æquatur altitudini Poli, seu ÆZ = HP. Nam HZ = 90°; pariter ÆP = 90°. Ergo subducendo utrinq PZ, erit PH = ÆZ.

Scholium 1^m.

Hoc ultimo Corollario Geographi æstimant Latitudinem loci cujusvis in superficie telluris. Latitudo enim loci est ejus ab Æquatore distantia, sive distantia, quæ est inter Zenith incolarum ejusdem loci & Æquatorem. Porrò hæc distantia æquat Poli altitudinem ex Corollario 3°; Ergo ad definiendam loci Latitudinem, satis est ibidem observasse altitudinem Poli.

Hinc Parisiorum latitudo est 49°.

Hæc autem latitudo loci terrestris arcu aliquo circumferentiæ terrestris debet æstimari; illius igitur arcûs

mensura est Leucis vulgaribus, nempè earum singulæ constent Exapedis 2282 definiendæ.

Porrò arcûs circuli majoris in loco terrestri mensura sic fuit leucis vulgaribus definita: Ambiani, qod ipsum nostri est boreale, ~~meridia~~ meridiana altitudo solis est quantitate I° qam Parisiis minor. Ergo distant Ambæ civitates quantitate I°; sed hæc distantia vulgaribus mensuris æstimata est 25 leucarum; Ergo I° in meridiano terrestri = 25 Leuc.

Hinc concludi potest globi terrestris circumferentiam circiter esse = 25 L. × 360 = 9000 Leuc.

Scholium 2dum

Ut verò situm loci in superficie telluris definiant Geographi, satis non habent ejus Latitudinem sive borealem, sive australem determinasse; inquirendum est insuper an et qantum locus ille ad Ortum vel ad

Occasum vergat, quæ inquisitio difficilior præcedente est, sitq peragenda:

Distantia meridiani per locum propositum transeuntis ab altero quodam meridiano ad libitum sumpto, illius loci Longitudo dicitur. Hæc æstimanda est arcu Æquatoris, vel circuli paralleli, inter utrumq Meridianum comprehenso, computaturq ab occasu in Ortum ~~Occasum~~.

Porrò edixit Ludovicus 13.us ut tanquam primarius assumeretur Meridianus ille, qui transit per fines insulæ vulgò dictæ De fer inter Canarias maximè occidentalis. Parisii verò sunt iis finibus orientaliores $19°, 53', 45''$; seu circiter $20°$. Itaq distantia meridiani regii Parisiensis a meridiano primario est ferè $20°$.

Pariter locus qilibet numero n graduum orientalior, vel occidentalior Parisiis, longitudinem habet $= 20° \pm n$. Sic quia Pictavium occidentalius est Parisiis qantitate $2°$, ejus Long: $= 20 - 2 = 18°$.

226. Usus autem cum in Astronomiâ, tum in Geographiâ receptus, est ut longitudo partibus temporum indicetur. Viz. qui Parisiis profectus versus Ortum per=venit usq ad 15°, V: G: Vindobonam, is 1^{H} citius quam Parisiis Solem oriri per=spicit; ergo potest pro 15° Long: nume=rari 1^{H}; pro 30° Long: numerari possunt 2^{H}, pro 360°, 24^{H}, seu Dies una; pro 1°, 4'; pro 2°, 8^{M}; &c. Unde Astronomi V: G: dicunt Pictavii Longitudinem respectu Parisiorum esse 1°: sed hanc aiunt esse = 8^{M}. Occid. Potest igitur observato discri=mine temporum longitudo locorum observari; satis est in duobus locis idem quoddam phœ=nomenon à duobus Astronomis conspici. Si enim V: G: eadem Eclypsis Lunæ in Mar=tinianâ Insulâ incipiat horâ 12â, id est, mediâ nocte, incipiat autem Parisiis ho=râ 16â, id est, 4â matutinâ, temporum dif=ferentia est = 4^{H}; adeoq distantia meri=dianorum Parisiensis & Martiniani, seu insulæ longitudo respectu Parisiorum, est = 60° Occid.

Die 7° Maij. A. 1768.

Problema 3.m

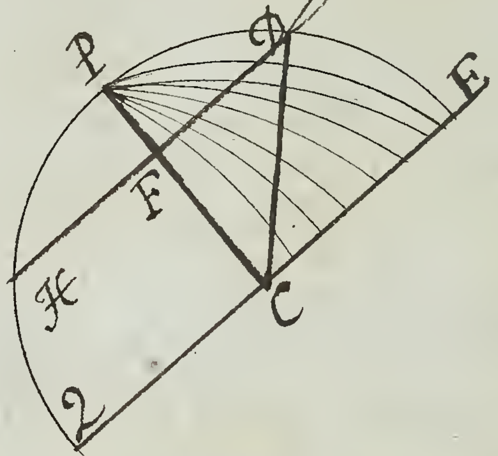
Invenire directionem meridiani in loco dato?

Solvit.r Stella polaris & stella Ursæ majoris simul reperiuntur in eodem plano verticali, altera superior, al=tera inferior; Ergo si datto in loco ad perpendiculum erigantur duæ lineæ parallelæ, simulq inspiciantur juxta plani superficiem iisdem finiti, ita ut radii visuales ad duas stellas dirigantur, tunc illæ lineæ in plano meridiani versantur. Hinc linea meridiana in superficie telluris fa=cilè ducitur.

Problema 4.m

Datâ distantiâ alicujus loci D ab Æquatore, seu dato meridiani arcu DE inter Æquatorem & alium circulum parallelum comprehenso, determinare quantitatem singulorum graduum longitudinis ad latitudinem prædicti loci D?

228. Solvitr. Sit EQ diameter Æquatoris; DH diameter circuli paralleli; ex centro telluris C ad locum datum ducatur semi=diameter CD = CE.



Nunc unus gradus longitudinis in ipsâ Æquatoris circumferentiâ sumptus, est ad gradum unum longi=tudinis ad latitudinem puncti D, ut radius Æquatoris CE, est ad radium circuli paralleli DF. Porrò cùm detur arcus DE, cognoscitur angulus DCE, proindè etiam angulus DCF, qui illius est complementum. Prǽtereà cognoscitur terrestris ra=dii CD longitudo = 3,271,565 tœpedas. Igitur triangulum rectangulum DFC facilè poterit resolvi; est enim

$$1 : CD :: \sin. DCF : DF.$$

Hac innotescet radius circuli paralleli. Postremò si gradus longi=tudinis in ipso Æquatore sumpti

supponantur æquales gradibus latitudinis, patet magnitudinem graduum longitudinis in puncto D continuo detectum iri.

Scholium 1^{m}

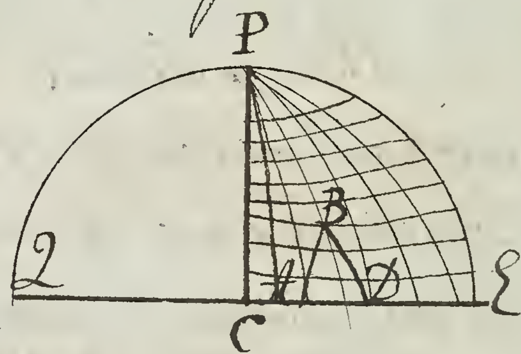
Ut autem concipiatur quomodo æstimari potuerit semidiameter terrestris, fingamus puncta D & E cacumina esse duorum altissimorum montium sat grandi intervallo a se dissitorum, & ibi duos simul observatores consistere. Ab his æstimari possunt 1° anguli DEC, EDC; 2do intervallum DE; quod satis est, ut resolvatur triangulum DCE, sicq. innotescat DC vel CE.

Scholium 2^{dum}

Problematis 4^{ti} solutio methodum suppeditat construendi tabulas longitudinum ex Æquatore ad Polum paulatim decrescentium, in q^{bs} viz. notetur quantitas singulorum graduum longitudinis a 0 usq. 90.

Scholium 3.m

Jam facilè æstimari poterit distantia duorum locorum terrestrium A + B, cog=
=nitâ utriusq latitudine + longitudine.
Constructo enim super
A B triangulo-rectangulo
A B D, latus B D diffe=
=rentiam latitudinum
utriusq loci exhibebit,



latus autem A D differentiam longitudinum.
Porrò sumptis pro unoquoq latitudinis gradu
25 leucis, cognoscitur B D; æstimatâ
verò graduum longitudinis quantitate
ad latitudinem loci A seu D, innotescit
A D. Ergò invenietur etiam A B = $\sqrt{BD^2 + AD^2}$.

Notandum tn minus accuratam
fore hanc methodum, si ageretur de
locis maximè dissitis; tunc enim
triangulum A B D foret curvilinium.

Observatio 2.da

Sol singulis diebus accedit ad stel=
=las magis orientales. Itaq Sol mo=
=veri videtur ab occasu in ortum
per 365 dies circiter. Motus ille pro=
=prius seu annuus appellatur. Semita
solis eclyptica dicitur, estq obliqua
Æquatori. Hinc cum singulis diebus
circulos Æquatori parallelos descri=
=bere Sol videatur, patet eum in
variis partibus Orizontis oriri &
occidere. Porro distantia veri ortus
a puncto, ubi Sol oritur, amplitudo
ortiva dicitur. Distantia vero puncti
ubi Sol occidit, ab occasu vero dictr
amplitudo occidua. Utramq metitur
arcus Horizontis.

Obliquitas autem eclyptico rsptu
Æquatoris nunc est = 23°28', seu circiter
23½°, constat autem ex priscis observa=
=tionibus, annis ante Æram vulgarem
circiter 450, eamdem obliquitatem fuisse
24°. Hinc concludendum est, ~~se~~ sensim

sine sensu minui angulum, sub quo planum eclyptico secat planum Æquatoris.

In parte boreali circulus parallelus qui distat ab Æquatore quantitate $23\frac{1}{2}°$, dicitur Tropicus Cancri, alter oppositus dicitur Tropicus Capricorni; neq Sol unqam ab Æquatore digreditur ultra Tropicos.

Observatio 3ª

Dum Sol describit eclypticam, duodecim signa percurrit sequentibus versibus expressa:

„Sunt Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍,
„Libraq ♎, Scorpius ♏, Arcitenens ♐, Caper ♑, Amphora ♒,
Pisces ♓."

Singulæ constellationes 30° in situ occupant ab occasu in ortum juxta eclypticæ longitudinem. Illæ vero utrinq tum versus boream tum versus austrum extenduntur quantitate $80\frac{1}{2}°$ circiter. Ergo eædem constellationes Zonam quamdam faciunt 17° circiter latam, quæ Zodiacus appellatur.

Die 9° Maij.

Observatio 4.ª

Luna per horas 24 progreditur versus ~~[illegible]~~ Ortum quantitate 13° circiter; adeoq per dies circiter 27, seu accuratè per 27 D, 7 H, 43 M suam revolutionem absolvit ab occasu in ortum rsptu ejusdem stellæ.

Variatur angulus orbitæ lunaris cum eclypticâ; ejus qantitas media = 5°, 8′, 46″. Puncta in qbs orbita lu=naris secat eclypticam dicuntur Nodi. Idem est de planetis cæteris. Porro nodi lunares continuo regrediun=tur versus occasum. Regressus quan=titas per annum unum & Dimidium = 1″, 30‴.

Observatio 5.ª

Sex Planetæ ad annum usq 1781 nu=merati sunt, novum illo anno detexit Herschel apud Anglos Astronumus at Bath; quem qdm appellavit Georgium sidus; apud cæteros autem Astronomos Planeta Herschelli nuncupari solet. Septem itaq ~~[illegible]~~ ab hinc annis Planetæ

numerantur, Viz. Mercurius ☿, Venus ♀, Terra ✳, Mars ♂, Jupiter ♃, Saturnus ♄, [illegible] tum verò Herschellii ♅ planeta cæteris a Sole longè remotior.

Quatuor ultimi *superiores* dicuntur, duo primi *inferiores*. Illi planetæ variis temporum intervallis ab occasu in ortum revolvuntur. Circa tellurem præterea planeta secundarius volvitur, nempè Luna per 27.7.43 (D. H. M.)

Circa Jovem quatuor moventur Lunæ, quæ dicuntur *Satellites*.

Quinque demum satellites Saturnus habet. Vide pag. 300^am.

Scholium.

Jam intelligendis ac æstimandis siderum motibus præmittendæ sunt quædam usitatiorum nominum definitiones. Itaque sit

Definitio 1.^a

Cum sidus transit per meridianum, tunc ejus ab Æquinoctio distantia

arcu Æquatoris æstimata dicitur Ascensio recta.

Hinc 1° si punctum Æquinoctii simul cum sidere transit per meridianum, tunc ascensio recta est = 0. Si punctum Æquinoctii unâ horâ citius transit quam sidus, tunc ascensio recta sideris est horæ unius seu graduum 15.

2do Hinc datâ sideris A ascensione rectâ, facile patet sideris B distantia ab Æquinoctio. Satis est observasse quanto tardius B transeat per meridianum. Discrimen istud temporum in gradus conversum erit ascensionalis differentia.

Definitio 2da.

Declinatio sideris est ejus ab Æquatore distantia, cùm transit per meridianum. Declinatio dpx, altera borealis, australis altera. Utraq. æstimatur arcu circuli verticalis.

Hinc declinatio sideris est excessus meridianæ ejus altitudinis supra Æquatoris altitudinem.

Sic Parisiis cùm altitudo Æquatoris sit = 41°, si altitudo sideris est = 48 deg:,

 erit sideris declinatio = 7. degrees

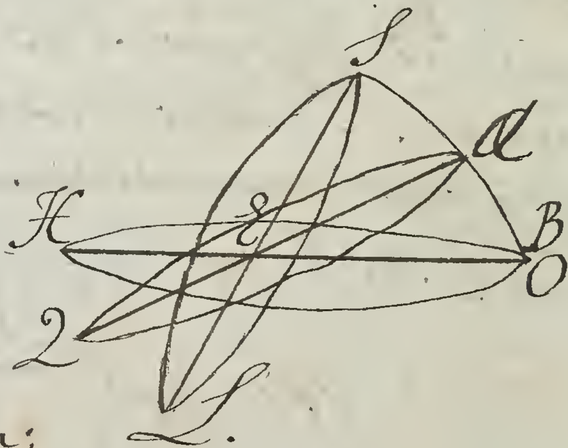
Definitio 3ª

Cum sidus per circulum eclyptica ~~parallelum~~ perpendicularem transit, tunc ejus ab Æquinoctio distantia arcu eclyptica estimata dicitur Longitudo vera sideris.

Problema 5m

Invenire longitudinem veram Solis?

Solutio. Sit ES longitudo quæsita; sit Æquator Æ; Horizon HO; Meridianus BS.



Observetur altitudo BS solis supra Horizontem; inde subducatur altitudo Æquatoris AB, quæ Parisiis est = 41°; residuum erit AS, quæ est declinatio solis.

Jam in triangulo sphærico AES, cognoscitur latus AS; aliundè verò angulus AES = 23° 30′; angulus autem SAE = 90°. Ergo ex Trigonometriâ sphæricâ habebitur latus ES, quæ est longitudo vera Solis.

Scholium.

Patet ascensionem rectam Solis esse AE: ~~[struck]~~ porro in superiori triangulo fa=cile detegitur quantitas lineæ AE.

Definitio 4.ª

Longitudo media est numerus graduum longitudinis, qam unoquoque die sidus haberet, si longitudo æquabiliter cres=ceret. Hoc æstimatur dividendo 360°. per tempus periodicum sideris. Sic Solis longitudo media $= \frac{360°}{365+\frac{1}{4}} = 59', 8''.3$ Itaque in fine diei primi, longitudo media Solis $= 59', 8''.3$; in fine diei secundi, longitudo media $= 1°, 58', 16''.6$, &c

Definitio 5.ª

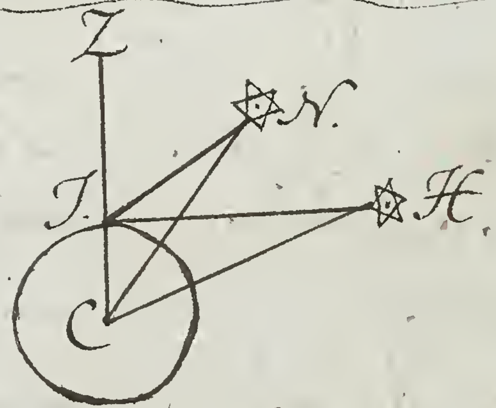
Latitudo sideris est ejus distantia ab eclypticâ, arcu circuli ad eclypti=cam perpendiculari æstimata.

Hinc 1°. Latitudo solis nulla est:
Hinc 2do. Latitudo planetæ nunc borealis est; nunc australis. Cæterum

 nullus est planeta cujus latitudo superet 8°, 30′; siquidem omnium orbitæ intra Zodiaci limites continentur.

Definitio 6.ª

Parallaxis est angulus, quem in centro sideris faciunt duo radii visuales, quorum alter è centro telluris, alter ex superficie ad sideris centrum dirigitur.



Hinc in Zenith Parallaxis = 0: in Horizonte Parallaxis est angulus CHT, hocque dicitur horizontalis: inter Zenith & Horizontem Parallaxis est angulus CNT, hocque vocatur Parallaxis altitudinis.

Problema 6.ᵐ

Data Parallaxi horizontali, invenire distantiam sideris à centro telluris?

Solvitur. Angulus CTH = 90°; aliunde

ex hypothesi notus est angulus CHT;
nota demum est semidiameter CT;
Ergo ... Sin. H : Sin. tot. :: CT : CH;
Adeoque .. $CH = \frac{CT \times \text{Sin. tot.}}{\text{Sin. } H}$ seu $\frac{CT}{\text{Sin. } H}$.

Triangulum CTH saepe dicitur Parallacticum.

Problema 7m.

Cognitâ Parallaxi horizontali, invenire parallaxim altitudinis?

Solvitr. In triangulo CTH, est
...... CH : CT :: Sin. tot. : Sin. H;
Est quoque in triangulo CTN,
...... CN : CT :: Sin. CTN : Sin. N ......
Sed ob eandem sideris à centro telluris distantiam CN = CH. Ergo CH : CT :: Sin. CTN : Sin. N
Proinde Sin. tot. : Sin. CTN :: Sin. H : Sin. N
Sed sinus CTN = Sinus NTZ; Ergo Sinus totus : Sinus NTZ :: Sinus H : Sinus N.

Porrò sinus NTZ = Cosinus altitudinis.
Ergo Sinus totus : Cosin. altitud. :: Sin. H : Sin. N.

240. Adeòq̃ Sinus N = Sin. A × Cosin. altitudinis.
Maxima verò Parallaxis etiam horizon=
=talis, quæ Lunæ est, vix æquat I.° Ergo
pro sinu illius potest arcus assumi;
Ergo N = A × Cosin. altitudinis.

Parallaxis annua seu orbis majoris est differentia longitudinum, quas habe=
=ret sidus, si conspiceretur primum è centro solis, deinde verò è centro telluris.

Definitio 7.ª

Annomalia est distantia sideris à suo aphelio, hoc est, orbitæ suæ puncto maximè remoto à Sole. Annomalia vera est angulus, quem in foco ellypseos facit radius vector cum Apsidum lineâ.

Annomalia excentrica est angulus, quem in ellypseos centro facit Apsidum linea cum radio circuli ducto ad Ordi=
=natam, quæ transeat per locum verum sideris.

Annomalia media est distantia si=
=deris ad aphelion æstimata quasi tempori proportionalis, ideòq̃ tempus in=
=sumptum à sidere ut ad Apsidem redeat, Vocatur periodus annomalistica.

Discrimen anomaliæ veræ a mediâ sæpe dicitur æquatio orbitæ seu æquatio centri.

Observatio 6.ª

Planetæ versus suam cum Sole conjunctionem sunt directi, id est, procedere videntur ab occasu in ortum: versus suam oppositionem sunt retrogradi, seu videntur recedere ab ortu in occasum: inter utrumq situm stationarii apparent, hoc est, quasi eidem puncto per aliquod tempus affixi.

In planetis autem superioribus major est diuturnitas, minorq arcus retrogradationis, cum planeta remotior est.

Definitio 8.ª

Eclypsis Solis est obscuratio solis ex umbrâ Lunæ: eclypsis autem Lunæ est obscuratio Lunæ ex interpositâ telluræ. Viz. Luna & Sol sæpissimè conjunguntur, totiesq opponuntur.

Observate vero singulis lunæ revolutionibus e evenire conjunctionem & oppositionem. Luna enim per 27 dies 7.^{H} 43.^{M} iterum redit ad locum, in quo

 fuerat Soli conjuncta: interim vero Sol ab eo loco recessit; Ergo Luna non attinget Solem nisi post duos circiter dies. Conjunctiones igitur vicinæ dis=tant diebus 29½; hæcq distantia vo=catur Mensis Lunæ synodicus, qi solus obtinet in usu civili. Porro conspicua Luna non est in conjunctione suâ cum Sole; pleno lumine fulget in oppositione. Hinc conjunctio novilunium, oppositio plenilunium dicitur. Ambo situs communi nomine vocantur Sizigia.

Numquam Solis Eclypsis fit, nisi ipso novilunii tempore; pariter Luna nunqam deli=quium patitur, nisi in plenilunio: neq tn in singulis Sizigiis defectiones Solis aut Lunæ evenire putandæ sunt. Facit enim latitudo lunæ ut terræ umbrâ in plenilunio Lunam aliqdo non tangat.

Jam vero Eclypsis alia vulgo partialis vocatur, alia centralis, alia totalis. Magnitudo Eclypsis æstimatur digitis seu partibus duodecimis diametri sideris obscurati. Sic Eclypsis 3 digitorum ea est, quæ cadit in quartam partem diametri. Eclypsis 24 digitorum esset ea quâ diameter etiam dupla ob=scuraretur.

Problema 8um

Invenire diuturnitatem maximam Eclyp=sis totalis in Sole?

Solu. In Eclypsi totali Sol est Apogæus, hoc est, maxime a terrâ distat. Luna autem ~~apogæa~~ perigæa seu minime a tellure remota. Tunc vero primum totalis est eclypsis, cum

Limbus orientalis Lunæ marginem ori=
=entalem Solis attigerit; cum Limbus occi=
=dentalis Lunæ distabit a margine occiden=
=tali Solis quantitate 2′, 30″; siqdm eâ qan=
=titate apparens Lunæ diameter superat
diametrum solis; Ergo totalis erit eclypsis,
qmdiu Luna 2′, 30″ orbitæ suæ describet.
Porrò Luna insumit 5′ temporis ad percur=
=rendos gradus 0°, 2′, 30″; Luna enim per 1.H
=60′ conficit circiter 0° 30′. Perseverantia igitur
eclypsis in Sole est circiter = 5.′

Problema 9m.

Invenire diuturnitatem maximam eclypsis totalis in Lunâ?

Solv.r Totalis est eclypsis, ex qo Limbus occidentalis subiit umbram telluris, donec limbus orientalis exeat ex umbrâ. Ergo tempus illud superest definiendum.

Jam vero in distantiâ Lunæ est diameter umbræ terrestris tripla diametri lunæ; semidiameter lunæ = 30′ circiter; Ergo duæ diametri qæ tunc decurrendæ supersunt, faciunt 1°: Atqi Luna insumit 2H circiter ad conficiendum 1°. siqdm 12° circiter conficit per 24H

Systema Ptolemei.

1° Terram in centro mundi totius immotam supponit Ptolemæus, 2° circa tellurem Luna volvitur, 3° volvitur Venus, 4° Mercurius, 5° Sol, 6° Mars, 7° Juppiter, 8 Saturnus, 9° Stellæ fixæ & firmamentum

Solus hic ordo siderum ad Astro=
=nomiam pertinet.
Minus enim atten=
=denda sunt ea
quæ ulterius
effingebat.
Ptolemæus
& G: solidos esse
orbes, in qbs
planetæ re=
=volverentur:
vel supra stellas
fixas duos esse
cœlos cristallinos,
unumque empyreum,
in quo Beatorum sedes continerentur.



Conclusio.

Rejicienda est hypothesis Ptolemaica.
Demonst: Rejicienda est illa hypothesis, quæ certissimis adversatur phænomenis: Atqui sic se habet hypothesis prædicta: 1° Sol qdoq terram inter & planetas inferiores versatur. 2do. Mars est aliqdo telluri proprior quàm Sol; Atqi utriq phænomeno repugnat hypothesis Ptolemaica.

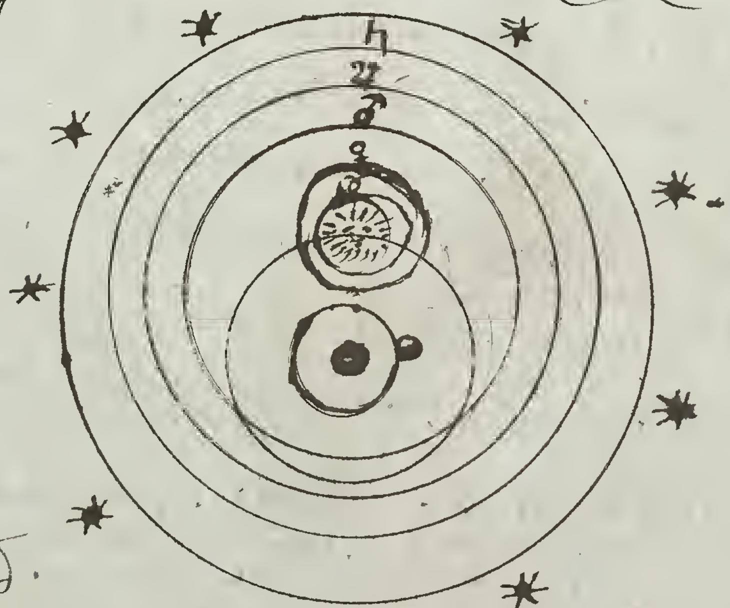
1° qdm. eâ in hypothesi Sol nunqam potest terram inter & planettas inferiores versari. Corpus enim qod in circulo exteriori revolvitur, nun=
=quàm potest centrum inter & circumfe=
=ferentiam interiorem transire:

Atqui juxta Ptolemæum orbita solis exterior est planetarum inferiorum orbitis; Ergo &c.

2do in eâdem hypothesi Mars esse ō potest telluri proprior quàm Sol. Nam eâ in hy=pothesi circulus Martis ambitu suo com=plectitur orbitam Solis; Atqi nullum punc=tum circuli ambientis potest centro esse proprius qām punctum circuli interioris. Ergo &c.

Systema Tycho-Brahei.

Juxta hunc Astronomum planetæ se=quenti ordine disponuntur.



1°. Tellus in centro mundi quiescit.
2°. Circa terram volvitur Luna.
3°. Post Lunam Sol revolvitur.
4°. Sol est centrum commune, circa qod cæteri planetæ Mercurius, Venus, Mars, Jupiter, Saturnus revolvuntur.

Hinc patet eosdem planetas simul cum Sole quasi totidem satellites circa tellurem revolvi.

Facile patet eo in systemate illa incommoda evitari, quæ in hypothesi Ptolemaicâ incurrebant.

Conclusio.

Rejiciendum est Systema Tychonis.

Probr. Tempora periodica sunt ut radices quadrato cubi distantiarum mediarum a centro communi. Ergo si Sol & Luna circa centrum commune revolverentur, ut Tycho supponit, jam tempora periodica essent ut radices quadrato cubi mediarum a centro communi distantiarum; Atqui sane raonem illam o sequuntur Solis & Lunæ tempora periodica. Est enim Solis tempus periodicum = 365 D, 5 H, 49 M, 45″·5.
Lunæ vero tempus periodicum = 27 D, 7 H, 43 M, 4″·6.

Distantia Solis a Terrâ est Leucarum 34,761,680 circiter.

Distantia vero Lunæ est 86,324 Leuc.

Atqui $\simeq$ valet hoc analogia : $\overset{D}{365}, \overset{H}{5}, \overset{M}{49}, \overset{''}{45.5}$: $\overset{D}{27} . \overset{H}{7} . \overset{M}{43}, \overset{''}{4.6}$ :: $\sqrt{34761,680^3} : \sqrt{86,324^3}$
Ergo &c

Systema Copernici

Vide Pag. 300.

Antequam de motu terræ hypothesim restauravit Copernicus. Hic porrò est siderum ordo juxta Copernicum



1°. Sol in centro mundi constituitur nullo nisi rotationis motu donatus.
2°. Circa Solem revolvuntur ab occasu in ortum Mercurius,
3°. Venus,
4°. Tellus ♁ circa hunc Luna, 5°. Mars, 6°. Jupiter, circa quem quatuor revolvuntur satellites;
7°. Saturnus, circa quem satellites quinque revolvuntur, hic quoque annulo quodam

cingitur; 8°. planetarum orbitas ambiunt stellæ fixæ: ——————

Insuper singulis planetis motum rotationis ab occasu in ortum affingit Copernicus ——————

Conclusio 1ª:

In systemate Copernicano explicantur phænomena Solis. ——————

Probat^r. Hæc phænomena revocantur ad motum utrumque Solis diurnum & annuum, ad dierum inæqualitates, tempestatumque vicissitudines; Atqui apud Copernicum expli=
=cantur quatuor illæ apparentiæ.

1°. explicatur diurnus motus solis ab ortu in occasum. Nam juxta Copernicum Terra singulis diebus ab occasu in ortum circa seipsam rotatur; Atqui ō potest ab occasu in ortum tellus rotari, quin Sol videatur motus ab ~~occasu~~ ortu in occasum intra idem tempus; siquidem aliquis circa seipsum stans pede in uno revolvitur, corpora circumposita, etsi quiescant, videntur tn simul in contrarium mota;

Ergo Sol videndus est moveri singulis die=
=bus ab ortu in occasum. Ergo &c.

2.° Explicatur motus annuus Solis. Nam
ex in systemate tellus singulis annis circa
Solem revolvitur: Atqui o potest tellus
anniversarias circa solem revolutiones absolvere,
quin Sol eodem temporis intervallo ab occasu
in ortum revolvi judicetur. Cum enim
tellus est in Librâ, tunc Solem refert
ad Arietem; cum ea est in Scorpio, Solem
refert ad Taurum; cum est in Sagittario,
tunc Solem refert ad Geminos; Ergo Sol
videtur transire ex Ariete ad Taurum,
ex Tauro ad Geminos, & ita deinceps, id est,
videtur ab occasu in ortum revolvi. Ergo &c.

3.° Dierum inaequalitas explicatur.
Huc enim revocatur ista inaequalitas, 1.°
cur ~~Sol~~ sub Aequatore perpetuum sit Aequi=
=noctium. 2.° cur sub Polis dies sint sex
mensium. 3.° cur iis qui Polum inter &
Aequatorem versantur dpx sit Aequinoctium,
residuo autem anno dies sint continuo
inaequales; Atqui hoc oia apud Coperni=
=cum facile intelliguntur.

1.° qdm sub Aequatore perpetuum est
Aequinoctium. Horizon enim Aequatorem
dividit in duas partes aequales; Ergo Sol

tamdiu est supra Horizontem, quamdiu infra delitescit: Ergo &c.

2.° Qui Polos habitant, diem habent sex mensium. Quamdiu enim ex Æquatore ad Tropicum Cancri Sol ire videtur, atq ex Tropico ad Æquatorem regredi, tamdiu Polus borealis ad Solem conversus manet; tamdiu proinde Solis lumine fruitur: Atqui Sol in accessu ad Tropicum & re=ditu ad Æquatorem sex menses solidos insumit. Ergo sex mensibus continuo Polus noster borealis à Sole collustratur; iisdem vero mensibus Soli opponitur Polus australis; adeoque jacent in umbrâ, qui degunt sub Polo antarctico.

3.° iis qui Polum inter & Æquatorem versantur, debet esse debet Æquinoctium. Bis enim unoquoque anno Sol in Æquatore versatur; Atqui quoties Sol est in Æqua=tore, toties Æquinoctium est respectu omnium globi terrestris incolarum. Ergo &c.

Per residuum verò annum dies esse debent continuo inæquales respectu eorum, qui Polos inter & Æquatorem versantur: nobis esse debent longissimi ipso Sol est in Tropico Cancri, esse verò

brevissimi, qdo Sol Capricorni Tropicum occupat. Polus enim Globi terrestris ad Solem sensim obverti o potest, quin circulus lucis & umbræ finitor circulos Æquatori parallelos in partes inæqales dividat. Atqui tunc dies sunt noctibus inæquales. Ergo &c.

4°. demum explicantur tempestatum vicissitudines, Viz. Cur in Polis maximum sæviat frigus; Cur maximus sit calor in Zonâ torridâ, sæpe tmn in Æquatore minor quam in 15°. Latitudinis. Cur rsptu eorum qui Zonam temperatam incolunt, vario succedant tempestates: Atqui hæc oia facile intelliguntur apud Copernicum.

1°. qdm in polis vehementissimum esse oportet frigus. Tunc enim frigus est maximum, qdo minima est solarium radiorum actio, qdo proinde maxima est eorum obliquitas: Atqui nullus est terræ locus ad qem major sit qam ad polos radiorum solarium obliquitas. Ergo &c.

2°. Contrariâ de causâ maximus est calor in Zona torridâ. Etenim Zona eclypticæ subjecta est. Ergo in eandam Zonam perpendiculariter vibrantur radii solares; Ergo maxima est eorum actio; Ergo &c.

252. Attamen in 15° gradu latitudinis sæpe major est calor quam in Æquatore. Hac enim in lati=tudine radii solares æque perpendiculares sunt ac in Æquatore. Insuper enim noctes sunt bre=viores quam in Æquatore; Ergo per eas noctes minus dissipatur caloris; Ergo ex calore per diem unum impresso plus reservatur in diem crastinum: Atqui gradus illi simul cum gra=dibus crastina die impressis collecti, ma=jorem procul dubio summam facient, qam si pauciores fuissent reservati. Ergo &c.

3° Ratione simili intelligitur cur Zonæ utriusq temperatæ incolis variæ succedant tempestates; cur V: G: nobis crescat calor ad diem 21.m Julii, neq tn eâ die maximus sit. Nam ab Æquinoctio verno Sol continuo accedere videtur ad Tropicum nostrum borea=lem usq ad diem Junii 21.m Ergo ab Æquinoctio verno ad eam diem Sol continuo accedit ad nostrum Zenith, adeoq magis ppendiculares fiunt ejus radii; Atqi crescit calor, qdo per lineam magis ppendicularem vibran=tur radii solares.

Non tn ipsâ die 21.â Junii, sed post dies plurimos calor erit maximus. Quoniam etenim spatio brevissimo noctis dissipari oẽs nequeant gradus caloris die precedente im=pressi, necesse est gradus aliquos superesse in diem crastinum; Quod quia per dies

plurimos evenit, non ipsâ die 21.ª Junii, calor erit maximus &c — Ergo &c —

Conclusio 2.da

Eodem in systemate intelliguntur planetarum superiorum phænomena —

Prob.r Sint pro cæteris hæc duo phænomena præcipua. —

1.º Diameter Martis in oppositione major apparet quam in conjunctione; 2.º Planetæ superiores modo directi, modò stationarii, modò retrogradi videntur. Atqui hæc phænomena apud Copernicum explicantur —

Ac 1.um qdm, Mars enim in oppositione est, cùm tellus inter ipsum & Solem versatur; Atqui tunc major videnda est ejus diameter, siqdm est tunc telluri proprior. —

2.dum quoq explicatur. Primum directiones. Si nempè Jupiter (idem de Marte & Saturno dicendum) fuerit in conjunctione, tunc videndus est directus. Nam si in conjunctione quiesceret, dum tellus ex oppositione ad quadraturam transit, referretur ad puncta magis orientalia, sicq videretur in ortum progredi. Jam verò planeta idem insuper motu suo verè in ortum progreditur;

Ergo à fortiori directus videndus est.

2do. retrogradationes. Hæc sunt enim præcipuè in retrogradationibus observanda: 1º. locus in quo evenit retrogradatio; 2º. retro=gradationum intervalla; 3º. arcuum magnitudo; 4º. frequentia; 5º. diuturnitas; 6º. in planetis retrogradis quantitas diametrorum apparen=tium; Atqi hæc oia feliciter explicantur.

1º. Jupiter V: G: futurus est retrogradus in suâ oppositione cum Sole. Tellus enim cele=rius movetur Jove; hunc igitur post se relinquit, cum eâ solem inter & Jovem transierit; Ergo Jovem ad puncta magis occidentalia referre debent terricolæ.

2do. Intervalla retrogradationum explicantur. Quam ob causam V: G: inter punctum medium unius retrogradationis Saturni & punctum medium alterius proximè sequentis interfluat annus so=lidus cum diebus circiter 13. Si enim inter Solem & Saturnum nunc Tellus posita sit, jam Satur=nus retrogradus videbitur: postmodum anno elapso ad idem orbitæ suæ punctum Tellus redibit; interim verò Saturnus parum pro=greditur; ac peractis ferè 13 diebus, Tellus iterum medium se inter Saturnum Solemq constituet; altera tum perindè observabitur Saturni retrogradatio. Ergo &c.

3º. Majorem arcum retrogradationis habere Mars quàm Jupiter debet, majorem hic quàm

Saturnus. Nam cum planeta Telluri propior est, tunc retrogradationis arcus major efficitur ex eo quod radii qbs in sua retrogradatione conspicitur, citius sese decussant, proptereaque majorem illi inter fixas stellas arcum comprehendunt.

4° Saturnus sæpius Jove, Jupiter Marte sæpius apparebit retrogradus. Nam quo remotior est a Sole planeta, eo lentius movetur; Ergo terra frequentius transit inter Solem & planetam remotiorem, qam inter Solem & planetam propriorem; Ergo hic sæpius retrogradus apparere debet.

5° Planeta remotiores diutius esse debent retrogradi: nam videntur retrogradi quo tempore terra inter ipsos & solem transit: Atqui Tellus in transitu inter Saturnum V:G: & Solem plus temporis insumit quam inter Solem & Jovem ob celeriorem jovis quam Saturni motum ——

6° Planetarum superiorum diametri majores apparere debent, quando planeta sunt retrogradi quam si directi; siqdem planeta in sua retrogradatione sunt Telluri propiores quam in directione. Ergo &c ——

3.° Planetarum stationes jam facile intel=
=liguntur, tum quia directionem inter & retro=
=gradationem oportet ut statio aliqua
intercedat; tum quia cum planetæ supe=
=riores et quadraturis transeunt ad con=
=junctionem, tunc per radios parallelos
conspiciuntur. Ergo &c

Conclusio 3.ª

Planetarum ~~superiorum~~ inferiorum phenomena
explicantur in Systemate Copernicano.

Præcipua utriusq planetæ inferioris
phenomena sunt directiones, stationes &
retrogradationes; Atq hoc tria facile intel=
=liguntur in Systemate prædicto:

1.° qdm Venus (idem de Mercurio dicendum)
directa videbitur in conjunctione suâ su=
=periori cum Sole, id est, cum Sol inter ipsam
& Terram erit constitutus. Si enim tunc Venus
quiesceret, referretur a nobis ad puncta
magis orientalia; sed Venus insuper veloci=
=tate suâ in ortum fertur; Ergo a fortiori
directa apparere debet

2.° Cum Venus erit in conjunctione suâ
inferiori cum Sole, id est, cum Solem inter
& Terram versabitur, tum regredi vide=
=bitur & contra signorum seriem moveri.

Venus enim tellure celerior est, & minorem orbitam describit, majorem itaq arcum quam tellus eodem tempore conficiet, quod fieri nequit nisi ad puncta magis occi=dentalia referatur, nisi retrograda proinde videatur

3°. erit stationaria conjunctionem su=periorem inter & inferiorem, siqdm direc=tionem inter & retrogradationem statio evenit

Corollarium.

Admitti potest hypothesis Copernicana.

Prob.^t Illa hypothesis admitti potest, quæ observationibus est oio congrua; Atqi talis est hypothesis predicta. Observationes enim aliæ sunt de Sole, aliæ de planetis. Atqi utriq generi congrua est &c. ut patet ex dictis: Ergo &c.

Obj: 1°. Poli iisdem stellis fixis per totum annum respondent; Atqui ita non esset, si terra circa Solem revolveretur; Ergo &c.

Dist: Min: Vere o responderent, conc: apparenter, Nego Min: & Consqs. Stellæ qbs poli respondent dum tellus in Librâ est, distant a stellis, quibus ea respondet, dum est in Ariete;

hæc distantia æquatur diametro orbitæ terrestris; sed diameter illa exigua est respectu distantiæ stellarum fixarum a terrâ; Ergo iisdem stellis respondere poli videntur.

Inst. Hæc distantia major est stellâ primæ magnitudinis; Atqui stella primæ magnitudinis conspicua est; Ergo quoq conspicua est ea distantia.

Dist: Maj: Sed ea distantia lumen nec emmittit nec reflectit, Conc: Maj: secùs, N. Maj. & distinctâ sensu contrario Minore, Nego Conseq.

Obj: 2.do Iisdem terræ punctis eædem imminent stellæ verticales: Atqui contrarium eveniret in systemate allato. Ergo &c

Dist: Min: Contrarium vere eveniret Conc: Min: ita eveniret, ut facile observari posset, Neg: Min. & Conseq.

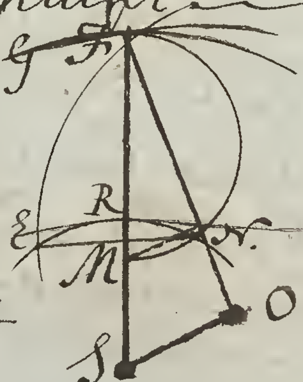
Inst: Qui transit ex Tropico ad Æquatorem, eosdem o habet stellas verticales; Ergo à fortiori diversæ sunt stellæ verticales, si tellus transit ex Ariete in Libram

Nego Consq: Ratio discriminis est, qod parallelæ sunt lineæ ad Zenith ductæ, dum terra est in Ariete & Librâ; adeoq ob ingentem stellarum à nobis distantiam illæ lineæ eodem in puncto eo in sidere videantur: At vero lineæ, quæ transeunt per Zenith duorum incolarum, quorum alter sit in Æquatore, alter in Tropico, sese in centro telluris intersecant, angu=lumq faciunt 23.° 30.' Ergo &c ———

Obj: 3.° Non possunt in systemate Co=pernicano retrogradationes planetarum explicari. Nam si valeret tradita expli=catio, planetæ, qui magis à tellure distant, per minores arcus essent retrogradi; Atqui falsum conseqens. Ergo &c ———

Nego Min: Cum enim planeta est tel=luri propior, tunc radii visuales, qui transeunt per centrum planetæ retrogradi, sese citius decussant qam si fieret in planetâ remotiori. Ergo arcum majorem inter fixas illi radii intercipiunt ———

Et vero demonstrat de la Lande (Astronomiæ L: 4.° p. 388) ad definiendum punctum, in quo stationarius videndus sit



planeta quidam inferior, primum illam proportionem institui oportere: ——
"Tempus periodicum terræ est ad tempus "periodicum inferioris planetæ, ut distantia "ejusdem a Sole, est ad SM." ——

Tum per punctum M sic determinatum, circumferentiam esse ducendam, cujus sit diameter MF; ——

Ac denique punctum N ubi hoc circum=ferentia orbitam planetæ intersecat, locum ipsum stationis esse. ——

Nunc patet 1.° si terra supponatur in puncto N, & planeta quidam superior in puncto F, videndum hunc esse statio=narium in eodem puncto F; radii quippe visuales ex N in F ducti communes sunt duobus spectatoribus, quorum alter esset in F, alter in N. Patet 2.do quo minor erit portio SM, eo majorem fore arcum RN, eo majorem proinde futurum esse arcum orbitæ terrestris inter duo stationis puncta comprehensum. ——

Atqui minor fit SM, cum magis à Tellure distat planeta superior. Sit enim tempus periodicum terræ = t, ejus à Sole distantia = d: sit tempus periodicum pla=netæ superioris = T, ejusq distantia a Sole = D; prædicta proportio fiet

$$T : t :: \partial : SM = \frac{t}{T}\partial;$$

Sed..... $\frac{t}{T} = \frac{\sqrt{\partial^3}}{\sqrt{D^3}}$;

Ergo... $SM = \frac{\sqrt{\partial^3}}{\sqrt{D^3}}\partial = \frac{\partial^2\sqrt{\partial}}{D\sqrt{D}}$.

In hâc autem fractione numerator est constans; decrescit ergo illa, quoties augetur D.

Propter orbitæ terrestris arcus comprehensus inter duo puncta, ex q^bs planetam superiorem terricolæ stationarium vident, hoc est, arcus à Tellure in orbitâ suâ descriptus, quo tempore superior planeta apparet retrogradus, tum major est, cum planeta idem est ad majorem à Sole distantiam. Ergo diutius retrogradi planetæ superiores videndi sunt.

Inst: Mars apogæus ≗ minori arcu retrogradationis retrogradus videtur quam Mars perigæus; Ergo minor ≗ est planetarum remotiorum arcus retrogradationis.

Nego Consq: Non enim est eodem modo judicandum de variis retrogradationum arcubus in diversis planetis;

ac in uno, eodemq planetâ. Sit velocitas unius ejusdemq planetæ in variis orbitæ suæ punctis crescit in ratione inversâ perpendiculorum in tangentes actorum; velocitates autem duorum planetarum sunt in ratione inversâ radicum quadratarum utriusq distantiæ. Ergo &c.

Systema Carthesii.

Vide Figuram ad calcem Voluminis.

Ordine, quo sidera disposuit Copernicus, ut causam physicam assignaret, finxit Carthesius,

1.° Materiam fuisse homogeneam & indefinitam, ita ut nullus esset locus qui a corpore non repleretur;

2.do eam fuisse in partes cubicas ac pene æquales divisam;

3.° fuisse partes illas tum circa seipsas, tum circa commune centrum agitatas; hæc autem agitatio fecit ut abraderentur anguli, atq hinc nasci debuit 1.° pulvisculus quidam qui materia subtilis est; 2.do globuli qui sunt materia globosa; 3.° partes crassiores

& irregulares, quæ materia ramosa est.

Ex his tribus elementis conflatur Vortex in quo singulæ partes agitantur motu proprio circa seipsas, motu com=munem circa centrum, ac motu flui=ditatis in omnem partem: porro siderum originem ac dispositionem sic exponit Carthesius.

1° Sol (idem de stellis fixis dicendum) est ingens copia materiæ subtilis in centro vorticis acervatæ, ad figuram sphæricam accedens, cujus singulis in partibus maxima sit velocitas circularis; Atqui origo illius materiæ sic apud Carthesium intelligitur. Jugis est globulorum affrictus; Ergo crescere debuit materiæ subtilis copia, multoque major fieri, quam quæ requiritur ad replenda globulorum intervalla. Ejus vero ma=teriæ imminui debuit vis centrifuga, tum propter jugem impetum in globulos mole majores, tum propter circuitum per angulos globulis comprehensos; Ergo non potuit materia subtilis ad partem vorticis exteriorem transire; adeoque fuit in centro coacervanda.

264. do
2. Planetarum originem (idem de Co=
=metis dicendum) sic explicat. Tertium
elementum, seu <u>materia ramosa</u> constat
particulis, quæ minus divisæ sint ac
minus agitatæ; Ergo materia illa mi=
=nus idonea est ad motus obliquos, qui
subeundi sunt in globulorum concursu;
Ergo ejus partes ad eclypticam expel=
=lendæ sunt; porrò illæ partes ob pressi=
=onem vorticis vicini debent striæ=
=rum & cochlearum figuram induere;
ideoque dicuntur à Carthesio <u>materia
striata</u>. Quoniam verò striæ illæ inter se
implicantur, debent in sideris superficie
corpus quoddam efficere lumini imper=
=vium; quod proinde instar maculæ ap=
=pareat. Jam crescente macularum
copiâ evenire potest, ut maculæ pri=
=mum raræ & molles, deindè & condensen=
=tur & indurescant, universumque sidus
obtegant; itaque juxta Carthesium pla=
=neta nihil aliud est quam sidus in=
=crustatum. Jam verò sidus incrusta=
=tum vires addere suo vortici desinit;
Ergo vortices vicini jam potentiores
facti corrodunt & opprimunt debiliorem,

tandemq absorbent. Sic Saturnus, Ju=
=piter, Mars, Tellus, Venus, Mercurius
in ditionem vorticis solaris olim re=
=ducti sunt; idem antea contigerat
satellitibus, qui planetas primarios
comitabantur.

3°. Motus planetarum sic explicantur:
cùm planetæ absorpti fuêrint a vortice
solari, coacti sunt vorticis ejusdem
motibus obsequi; ergo planetarum
motus intelligitur.

4°. Cometarum motus situsq di=
=versi explicantur. Nam juxta Car=
=thesium cometæ sunt planetæ qidam
errabundi, viz. cùm absorptus est
planeta, si majorem habeat solidita=
=tem quam ut ad certam usq profun=
=ditatem descendat, tunc postquam
in solari vortice fuerit aliquandiu agitatus,
inde vicinos in vortices transmigrabit,
ex qbs forte iterum sitin vorticem so=
=larem rediturus. Porro conspicuus
est cometa, cum in vortice solari
versatur: erit autem inconspicuus,
qdo erit in alio vortice. Quoniam vero
plurimos vortices perlustrant nonnulli

~~cometo~~ et vortice solari egressi, fit ut longum ~~nimium~~ sit tempus eorum periodicum; & quidem eo longius, quo per plures vortices transeunt, & in unoquoque ~~eorum~~ diutius immorantur.

Conclusio.

Rejiciendum est systema Carthesii.

Prob. Stare illud systema non potest sine materiâ subtili pernicissimo motu agitatâ. Atqui materia ejusmodi existere non potest. Materia enim illa jugiter infringitur in globulos ac in materiam ramosam; Ergo utrique motum communicat, adeoque partem amittit suæ velocitatis quantitatem; sed materiæ ramosæ ac globulorum moles infinities major est materiâ subtili; Ergo iis globulis ac materiæ ramosæ totam suam velocitatem primo impulsu communicat materia subtilis; Ergo jam nulla est materia ~~motu~~ pernicissimo motu agitata. Ergo &c.

Abs re prorsus est ceteras exposuisse causas, quibus Carthesii systema refelli possit.

Scholium.

Carthesianam hypothesim utpote imparem omnibus explicandis planetarum phœnomenis emendare conati sunt varii autores, præsertim Mallebranchius, Fontenellius, Molierius, quorum systema appellari solet hypothesis vorticum compositorum, nam simplices vocantur Carthesiani vortices. Porro ab enarrandâ illorum emendatione brevitatis causâ abstinemus, id solum observando ingeniosam q^dm postremam cœlestium vorticum historiam, sed minus fabulosam qàm Carthesii ipsius hypothesim plerisq Physicis visam esse, a q^bs passim est confutata.

Systema Newtoni.

Newtonus in principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis explicandam suscipit corporum cœlestium dispositionem. Corpora eadem jam formata & constituta supponit.

Porro hujus systematis duo sunt principia, alterum viz. omni corporē

resistente vacua esse spatia, quo trajiciuntur a Sideribus; alterum vero singulis corporibus insitam fuisse tendentiam quamdam, seu gravitationem ad centrum commune, tunc etiam ad sese invicem pro ratione directâ molium & inversâ quadrati distantiarum. —

Supponit insuper Newtonus sidera fuisse in principio cum diversâ velocitate, diversis in directionibus ac diversis in distantiis justa lineas directas projecta, & ex illâ vi projectionis cum gravitate attemperatâ colligit Newtonus celestium phenomenorum causam. —

Conclusio 1.ª

Spatia celestia corporibus resistentibus destituta sunt. —

Prob.r Vel datur vacuum, in quo sidera celerrime moveantur, vel existit fluidum ethereum, quale fingebant Carthesiani. Atqui nullum ejusmodi fluidum in spatiis celesti=

=bus existit. Si enim fluidum existeret, jam ut planetas, sic & cometas omnes ab ~~ot~~ occasu in ortum abriperet, nec sineret alios contra Signa moveri, aut eos qui juxta Signorum seriem feruntur, diversis in planis moveri, vel etiam majori celeritate deferri quam planetas illos, quorum in regione versantur.

1° qdm fluidum o sineret planetas ire contra signorum seriem, qod enim oem motum suo directioni contrarium brevi extinqueret in cometis, illud cometas contra signa moveri o pateretur: Atqui sic sese haberet fluidum æthereum ab occasu in ortum properans. Sicut enim absq remis aut vento o potest navis contra fluminis directionem progredi, ita nullus cometa posset contra fluidi ætherei directionem ab ortu in occasum moveri. Ergo &c.

2.do Si fluidum illud occuparet spatia cœlestia, jam cometæ nec in alio plano, nec cum aliâ velocitate moverentur quam planetæ, quorum

in regione versantur. Ut enim corpus oblique propulsum ad cursum fluminis, ~~si~~ cito ad directionem fluminis reducitur, neq potest ferri celerius flumine, ita Cometo nec celerius qam Planeta, quorum in regione versantur, nec in alio plano moveri possunt: Atqui tn ex observatis Cometis ~~qam~~ ~~plurimis~~ constat plurimos ivisse contra Signa, plurimos etiam majori velocitate abreptos fuisse quam planetas, qorum in regione versantur; Atqui diversis in planis revolutos esse; Ergo &c.

Hujus argumentationis vim ut eliderett, finxit Molierius cometas illos, qui contra Signorum seriem ivisse deprehensi sunt, o fuisse in vortice solari, sed in aliquo vortice vicino; verum hoc responsio nulla est. Nam cometa illi retrogradi curvos describebant versus solem concavas, areasq verrebant temporibus proportionatas: at si vicino in vortice fuissent revoluti, jam curvo quas trajicissent, convexa fuissent

versùs solem, neque temporibus fuissent proportionata area à radiis ~~vo~~ vec=
=toribus descripta; Ergo &c ————

Præterea globus tormentarius solitâ vi explosus diametrum suam milliesemetitur, priusqam retardari videatur; Atqui tn, si oia forent plena, globus iste mediam velocitatis suæ partem amitteret percurrendo spatium $= \frac{2}{3}$ suæ diametri; tunc enim velocitatem dimi=
=diaret suam, cùm pelleret molem fluidi sibi æqualem; Atqui hanc pelleret per=
=currendo $\frac{2}{3}$ suæ diametri; sic enim promo=
=veret cylindrum, cujus altitudo esset $= \frac{2}{3} 2a$, basis autem $= a^2c$; propulsa igitur moles foret $= \frac{4a^3c}{3}$: Atqui est etiam globi soliditas $= \frac{4a^3c}{3}$; Ergo &c. ————

Concludendum itaq est cum Newtono spatia cœlestia fluido corporeo esse des=
=tituta, si tn vapores quosdam tenuissi=
=mos & lumen, quo nihil rarius est, ex=
=cipias. ————

Dices 1°. Ætheris resistentiâ o extingui celeritatem corporum, quæ in æthere moventur; eam quippe statim restitui à fluido in spatium vacuum pone mobile relictum indesinenter refluente.

272. Resp: Etsi fluidum ad mobilis ter=
=gum refluerent, non idcirco velocitatem
quam mobile amisit, posse restitui.
Velocitas enim liquidi refluentis ma=
=jor esse non potest velocitate corporis
solidi liquidum propellentis; quandoquidem
effectus causam superare nequit suam;
Ergo fluidi ad tergum refluentis nulla
actio in corpus solidum esse potest.

Dices 2do Secunda ratio adducta
probat tantum vacua esse multa prope
tellurem; Atqui inde non sequitur vacua
esse pariter spatia celestia. ——

Nego Min: Ex eo enim quod vacuum
datur in locis prope tellurem positis,
concludi analogice potest in spatiis
quod celestibus vacuum dari; quod se=
=quenti ratiocinatione intelligitur:
"Fatetur Molierius, & Experimenta pro=
"=bant, dum a tellure receditur continuo
crescere aeris raritatem; Atqui ita
esse non potest, quin raritas hoc max=
=ima tandem evadat, ideoque nullus sit
aër in regionibus a terrâ maxime
distantibus. ——

Hâc analogiâ compertum habuit Newtonus in distantiâ 30 leucarum communium a terrâ aeris raritatem, esse ad raritatem illius, qui ipsam terræ superficiem lambit, in ratione majori quàm 1,000,000,000,000,000,000 : I. Ergo pes cubicus aeris in 30 leucarum distantiâ o est nisi pars $\frac{1}{10000000000000000 \text{ \&c.}}$ pedis cubici aeris nostri. ~~Ergo~~

Conclusio 2da

Admittenda est Newtoni Attractio. Prob^r. Hæc enim nihil aliud est quàm ea lex corporibus oibus ab Auctore Naturæ imposita, quâ versus centrum commune tendunt; Atqui lex ista admitti debet.

1º enim juxta Carthesianos, nullum periculum est ne ultima vorticum orbes dissipentur; Atqui tn celeriter abirent sublatâ Attractionis lege; neq enim tunc corporibus circupositis, nec crusta quam ridiculè fingebat

 Molierius, cohiberentur. Ergo ne ipsi quidem Carthesiani vortices carere Attractione possunt.

2.do Vacua multa esse probatum in 1.a Conclusione est: Atqui Attractio naturalem cum vacuo necessitudinem cognationemque habet. Dubitare enim non debemus quin motum sidera sibi mutuò communicent; siquidem Jupiter cum Saturno conjunctus aliquam experitur sui motûs perturbationem, ut observatione constat; Atqui in vacuo nulla fieri potest motuum communicatio, nisi virtute Attractionis. In vacuo enim partes omnino sese continuò tangunt; Ergo nullus relinquitur impulsioni locus; Ergo &c.

Denique licet efficax sit utraque procedens argumentatio, quam in Principiis Philos: Nat: instituebat Newtonus, potest ulteriori argumento gravitas generalis adstrui. Enimverò si quid obstaret quominùs Attractio admitteretur, maximè, ut aiunt Carthesiani, quia vis illa non esset mechanica; Atqui 1.o necesse omnino est omnem vim esse mechanicam; 2.do Attractio tam mechanica est quàm impulsio.

1°. qdm falsum est quod Carthesiani contendunt, vim oem debere esse me=
=chanicam. Tunc enim vis est mecha=
=nica, qdo illa potest ex motuum legibus deduci; Atqui sane o oportet, ut vis qolibet possit ex motuum legibus de=
=duci; secus enim prima oium lex nulla foret. Ergo &c.

2.do Jam mechanica est Attractio qam Impulsio. Causa enim efficiens impul=
=sionis est Nauturæ Auctor; causa autem occasionalis est corporum con=
=tactus: Attractionis autem causa efficiens est idem Naturæ Auctor; causa occasionalis est simultanea corporum sejunctorum existentia; jam vero simultanea hæc corporum existentia tam potest esse occasio, ob quam corpora moveantur, quam ipse contactus; potest quippe Naturæ Auctor quâcumque voluerit occasione uti, ut corpora transferat e loco in locum. Neque major est contactus effi=
=cacia quam alterius cujuslibet dis=
=tantiæ; siqdm contactus est dis=
=tantia qdam minima inter duo corpora

existens, quae nihil addit corporibus, nihil detrahit. Ergo &c.

Conclusio 3.tia

Attractio reciproca est.

Prob.r Constat experimento duas aquae guttas in plano horizontali juxta se invicem positas, in unicam coadunari; Atqui accessus ille guttarum oriri non potest, nisi ex Attractione illarum mutuâ. Nisi enim ambo guttae sese mutuo attraherent, jam una ad se traheret alteram, proindeque hoc altera spatium interjacens totum peragraret; quod experientiae adversum est; Ergo reciproca est utriusque guttae Attractio; Ergo &c.

Conclusio 4.a

Attractio est moli proportionata.

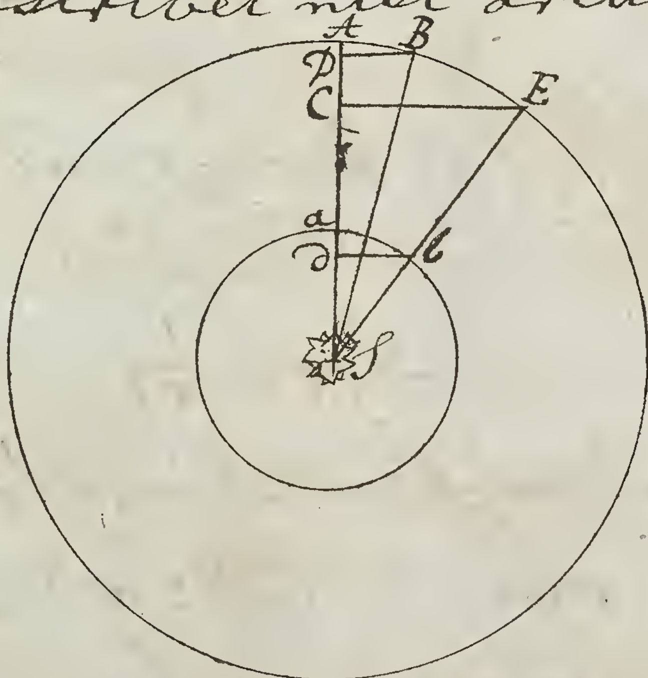
Prob.r Ut crescat vel decrescat Attractio in ratione molium attrahentis & attracti, satis est eo majorem esse Attractionem quo plures sunt in molibus attrahente & attractâ partes: Atqui sic sese res habet. Eo quippe major est

Attractio totalis, quo plures sunt Attractionum specialium gradus; siquidem ex Conclusione 2dâ suus est singulis partibus corporis cujuslibet Attractionis gradus. Ergo &c.

Conclusio 5ª.

In majoribus distantiis Attractio sequitur rationem inversam quadrati distantiæ a centro corporis attrahentis.

Demonstr. Trajici fingantur a duobus corporibus, V: G: Saturno & Tellure arcus exigui AB, ab per tempora T & t: jam Saturnus non describet nisi arcum AB, quo tempore arcum ab Tellus describet; Ergo Attractiones intra idem tempus exercitæ merito exhibentur Sinubus versibus AD & ad.



Sit AS = r, aS = I.

Ostendendum est valere analogiam $AD : ad :: 1 : r^2$.

Atqui reipsâ hoc analogia valet.
Est enim ex naturâ circuli

$$AD : AC :: \frac{\overline{AB}^2}{2r} : \frac{\overline{AE}^2}{2r} :: \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2.$$

Insuper verò, ob velocitatem in circulo æquabilem,

Tempus per $AB = t : T :: AB : AE$;

Proinde $AD : AC :: t^2 : T^2$;

Ergo $AD = \frac{t^2}{T^2} AC$

Verùm similes supponuntur arcus AE & ab; Ergo iidem arcus sunt inter se ut lineæ in utroq circulo similiter ductæ;

Ergo $AE : ab :: AC : ad :: r : 1$;

Unde $AC = r \times ad$.

Jam, substituendo, fiet

$$AD = \frac{t^2}{T^2} r \times ad.$$

Sed ex $2^{dâ}$ Kepleri regulâ,

$$\frac{t^2}{T^2} = \frac{1}{r^3};$$

Quapropter $AD = \frac{1}{r^2} ad$,

seu $AD : ad :: 1 : r^2$, quod demonstrandum erat.

Die 24.° Maij A.: 1748.

Altera & q^dm brevior, ejusdem rei Demonst:^o posita semel eâ Kepleri lege, juxta quam quadrata temporum periodicorum sunt inter se ut cubi distantiarum, q^o lex, Kepleri observationibus, cognita ante Newtonum fuit, habetur primum —

.... $T^2 : t^2 :: \frac{1}{D^3} : \frac{1}{\partial^3}$; ——

In diversis autem circulis, quemadmodum in theoriâ motûs curvilinei expositum fuit, dictis Attractionibus F & f, ——

.... $F : f :: \frac{U^2}{D} : \frac{u^2}{\partial}$. ——

Verùm in motu æquabili, qualis in circulis locum habet, ——

.... $U^2 : u^2 :: \frac{S^2}{T^2} : \frac{s^2}{t^2}$; ——

Proterea loco S^2 & s^2 substitui hic pos=sunt D^2 & ∂^2: loco autem T^2 & t^2, ex Kepleri lege, substituendi sunt D^3 & ∂^3 ; ——

Ergo erit $U^2 : u^2 :: \frac{D^2}{D^3} : \frac{\partial^2}{\partial^3} :: \frac{1}{D} : \frac{1}{\partial}$;

Ergo jam fiet $F : f :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{\partial^2}$. ——

Corollarium 1^m

 Ex Conclusionibus 4ª & 5ª sequitur illa pro=
=portio generalis ——————
.... $F : f :: \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2}$. ——————

Corollarium 2dum.

Si inter sphæras homogeneas utcumq inæqua=
=les corpus ita constituatur, ut ejus distantiæ
a centris sphærarum attrahentium sint earum
radiis pportionatæ, erunt vires corpus inter=
=positum attrahentes ut eorum radii. Sint
enim radii sphærarum R & r; erit ——————
.... $F : f :: \frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2}$. ——————
Sunt autem sphæræ ut radiorum cubi, hoc est,
$M : m :: R^3 : r^3$. Ergo $F : f :: R : r$ ——
Dices: Si corporibus oibus inesset vis attrahendi,
cur tam faciles possent globi sese contingentes sepa=
=rari? cur etiam separati ad se mutuo non re=
=dirent? &c ——————
Resp: Attractionem longè potentiorem, quam in
eos tellus exercet, in causâ esse, cur ô suæ invicem
attractioni obsequi videantur. Fingamus enim
globulum quendam in superficie telluris posi=
=tum prope sphæram ejusdem densitatis, & cujus
diameter sit unius pedis. Ex Corollario 2do
vis quâ globus iste a sphærâ vicinâ attra=
=hitur, est ad vim, quâ attrahitur a tellure,
ut radius sphæræ ad radium telluris, id est,
ut $\frac{1}{2}$ pedis est ad $1432\frac{1}{2}$ leucas vulgares. Porro
rsptu tanti numeri ferè nihil est $\frac{1}{2}$ pedis; Ergo &c.

Conclusio 6.ª

Positis Newtoni principiis explicatur mo=
=tus planetarum in ellypsibus.

Prob.r Positis Newtoni principiis planetæ gravi=
=tant in Solem secundum raonem inversam qdrati
distantiarum: Atqi positâ eâ lege gravitatis, pla=
=netæ possunt ellypses describere circa Solem in
foco constitutum. Nam planetæ ellypses describere
possunt cum illâ vi, qæ in ellypsibus locum habet,
quoties illæ describuntur; Atqui gravitas, quæ
sequatur raonem inversam qdrati distantiarum,
semper locum habet in ellypsibus, qoties illæ
describuntur, ut ostenditur in theoriâ motûs
curvilinei. Ergo &c.

Obj: Ut planeta describeret ellypsim, deberet ille
ex apside minori ad summam ascendere: Atqui
ascensus ille repugnat cum Newtoni ppiis; Ergo &c.

Nego Min: Ex theoriâ enim accelerationis notum
est cum velocitate in extremo lapsu acquisitâ
posse corpus viâ plane simili ad eandem
altitudinem ascendere, ex quâ fuerat delaps=
=sum; Ergo corpus qod descendendo trajecit me=
=diam ellypsim, potest alteram semissem el=
=lypsis per velocitatem in descensu compa=
=ratam trajicere. Ergo &c.

Inst: Illud potest ex Apside inferiori ad
majorem ascendere, qui continuò debet ad
focum accedere; Atqi sic se habet planeta
in principiis Newtoni. Ergo &c.

Nego Min: Debet enim planeta obsequi
utriq vi, qâ per totam suam periodum sollicitatur.
Ergo non debet ad focum continuo accedere, modo utrâq in
apside sit eadem raо virium, idemq angulus; Atqi sic

 se res habet; est q̄dm derectionum utriusq vis idem angulus;
nam directioni projectionis perpendicularis
est directio gravitatis. Est quoq ratio virium
eadem. Sicut enim in perihelio cum velocitate
V: G: duplâ componitur gravitas quadrupla,
si absis major sit duplo remotior à Sole;
ita in aphelio cum velocitate subduplâ com=
=ponitur gravitas dupla. Ergo eadem est
ratio, quæ in utrâq absîde: aliundè &c. Ergo &c.

Inst: Debet planeta magis ad focum acce=
=dere, q̄do gravitas fit continuò major vi pro=
=jectionis: Atqi sic se res habet in descensu
ad apsidem imam; Ergo &c

Dist: Min: Sed simul augetur velocitas, Conc:
eadem remanet velocitas, Nego Min: & Consq.
Re q̄dm ipsâ in descensu ad apsidem imam
crescit continuò gravitas; at eadem in des=
=censu celeritas etiam continuò crescit, siq̄dm
hoc sequitur raonem inversam perpendicu=
=lorum a foco in tangentes ductorum; Ergo &c.

Porrò hoc sufficit ut planeta ad focum
continuò accedat; cùm enim major est veloci=
=tas, tunc unoquoq in puncto minus immo=
=ratur planeta, ac consequenter minus agit
gravitas: Ergo &c.

Conclusio 7ma.

Iisdem in principiis explicatur diversa
orbitarum excentricitas.

Prob.r In eo consistit varia ista excen=
=tricitas planetarum, quod alii ellypses des=
=cribant acutiores, alii verò magis compla=
=natas ex utrâq absîde; Atqi varietas illa

in principiis Newtoni facilè intelligitur. Est enim juxta Newtonum alius in planetis major in aliis minor vis projectionis, in aphelio V: G: Atqui si major est vel minor vis projectionis in aphelio, planeta quòdq ibidem a circulo describendo plus vel minus deviabit; Ergo ellypsis quam trajiciet planeta, erit acutior vel obtusior. Itaq pro diversâ gravitatis & projectionis attemperatione diversa orietur excentricitas.

Conclusio 8.ª

In principiis Newtoni patet, cur legibus Kepleri planetæ obtemperent.

Prob.r Ex Conclusione 6.ª planetæ trajiciunt ellypses circa Solem in foco residentem; Atqui quoties ellypsis trajicitur, tunc Kepleri regulas observari ostenditur in theoriâ motus curvilinei; Ergo &c. Vide Pag: 101 &c.

Conclusio 9.ª

Eodem in Systemate intelligitur, quare planetarum aphelia lentissimè progrediantur ab occasu in ortum.

Prob.r Jupiter aliqatenus attrahit planetas sibi subjectos; Ergo imminuit paululum eorumdem gravitatem in Solem; Ergo planetarum semita paulo minus incurvatur; quapropter locus in quo curvæ a planetis trajectæ angulum rectum cum radio vectore facient, paulo orientalior futurus est; Atqi locus ille est aphelium; Ergo apheliorum motus explicatur. Motus quidem ille tardissimus est. Est enim

284. eo tardior quo minorem attractionem in pla=
=netas subjectos exercet Jupiter; Atqui attractio
illa est admodum exigua; Ergo &c.

Conclusio 10a

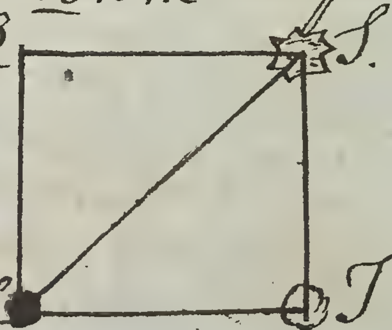
Positis Newtoni principiis Luna potest
ellypsim describere circa tellurem

Prob.r Nam juxta Newtonum Luna
animatur simul vi projectionis & gravitate,
quae sequatur legem inversam quadrato dis=
=tantiae; Atqui corpus hâc utrâque vi anima=
=tum potest ellypsim trajicere; Ergo &c.

Conclusio 11a

Explicatur apud Newtonum, cur varia=
=bilis sit lunaris orbitae excentricitas

Prob.r Si per actionem Solis aliquatenus au=
=getur gravitas lunae in tellurem, tunc Luna
debet magis ad focum accedere, sicque orbitam
magis excentricam trajicere: Si vero propter
actionem Solis aliquatenus imminuitur Lunae
gravitas in tellurem, tunc minus ad focum
Luna est accessura; sicque orbitam minus ex=
=centricam trajiciet; Atqui revera gravitas lunae
in tellurem aliquando Solis actione augetur,
aliquando minuitur. 1o Si Luna est in quadraturis,
tunc attrahitur a Sole juxta directionem obliquam
LS; Ergo solis actio duos habet
nisus, parallelum LE & perpendicularem
LT; jam vero aequantur Solis at=
=tractiones LE in lunam, & ST in
tellurem; Ergo supererit nisus LT
in centrum telluris. Ergo &c.



Cùm 2do. Luna versatur in conjunctione, tum minùs à Sole distat; Ergo fortiter attrahitur à Sole, adeòq minuitur ejus gravitas in tellurem; pariter cùm Luna est in oppositione, tum terra fortius qàm Luna attrahitur à Sole; Ergo tellus ali=qàntulum recedit à Lunâ; Ergo minuitur quoq gravitas Lunæ in tellurem; Ergo &c.

Conclusio 12a.

Potest in systemate Newtoni Luna simul cum Tellure Ellypsim describere circa Solem in foco constitutum ——

Prob.r Mutua est Lunæ ac Telluris gravitas: Ergo illæ suis attractionibus quasi vinculo inter se colligantur; adeòq potest tota utriusq gravitas spectari tanquàm in centro communi coacta. Ergo si centrum illud Ellypsim descri=beret circa Solem, jam Tellus simul & Luna Ellypsim qoq trajicerent: porrò intelligitur à centro isto gravitatis describendam fore Ellypsim: nàmq ad id satis est vis projectionis cum

gravitate, quæ sequatur rationem inver=
=sam quadrato distantiæ.

Corollarium.

Admittendum est Systema Newtoni.

Prob. Admittendum est illud systema, quod certis nititur principiis, & sufficit phænomenis explicandis: Atqui sic sese habet systema Newtoni.

1.° certis nititur principiis; duo sunt enim hujus systematis principia: alterum viz. in spatiis cœlestibus dari vacuum; alterum verò corpora cœlestia gravitate animari, quæ sequatur rationem directam molium, & inversam quadrati distantiarum: Atqui utrumque certum est, ex propositionibus 1.ª 2.ᵈᵃ 3.ª 4.ª 5.ª Ergo &c.

2.ᵈᵒ idem systema aptum est phænomenis explicandis. Nam alia sunt planetarum, alia satellitum; Atqui utrisque satisfacit systema Newtoni. Prioribus quidem, ut patet ex Conclusionibus 6.ª 7.ª 8.ª 9.ª: cæteris verò, ut constat ex Conclusionibus 10.ª 11.ª 12.ª Ergo &c.

Dices: Plurima sunt planetarum phænomena, quæ nec exponit Newtonus, nec in ejus systemate explicari queunt: talia sunt communis planetarum directio ab occasu in ortum; motus rotationis circa suos axes; varia planetarum a Sole distantia; exigua eorumdem ab Eclypticâ deviatio; &c. Ergo admittendum est &c.

Dist: Ant: Nec oportuit hæc oia a Newtono explicari, Conc: Ant: oportuit explicari, Nego Ant: & Consq:

Viz. in rerum naturâ occurrunt effectus duplicis generis; alii oriuntur ex principali & efficiente rerum oium causâ; alii ex causis secundis pendent. Priorum nulla est causa mechanica a Physicis inquirenda; siqdem ratio eorum nulla alia reddi potest, nisi qod hunc mundum, & verò alium condere voluerit Naturæ auctor; neq aliam profecto similium effectuum causam Carthesiani afferre possunt: sic si qæratur ab illis, quare vortex solaris ab occasu in ortum arripiatur, qid aliud, quæso, reponere poterunt,

nisi ita voluisse totius naturæ aucto=
=rem. Quapropter cùm ad hanc phænome=
=norum classem communis planetarum
directio, & alia ejusmodi pertinere vi=
=deantur, eorum sane causas a Newtono
proferri in medium & explicari minime
oportuit.

Inst: Debent Carthesiani illa phæno=
=mena exponere; Ergo illud pariter debuit
Newtonus.

Nego Consq: Quod enim prædicta phæ=
=nomena sint exponenda, non id ex ipsâ
sequitur phænomenorum natura, sed
ex eâ quam inducunt hypothesim; nempe
id unum sibi concedi postulant Car=
=thesius, Molieriusq, ut materia primùm
condita a Deo fuerit & motu donata;
quo semel posito mundi totius fabricam
ordinemq explicare aggrediuntur:
Porro qui formationem planetarum ac
suspensionem, qui totius materiæ dis=
=tributionem quasi regendam susci=
=piunt, iidem procul dubio explicare
debent, cur alii planetæ aliis sint
majores, alii a Sole remotiores, cur
sint eorum axes inclinati, cur planetæ

rotentur, cur potius in ortum quam in occasum ferantur, & alia id genus. Ergo multum dissimilis est Carthe=sianorum, Newtonianorumque conditio.

De

Aestu maris reciproco.

Marini aestûs explicatio pars est Newtoniani systematis haud praetereunda. Nimirum existimabant veteres Physici ex igne quodam subterraneo, vel ex animâ quadam globum terraqueum informante oriri alternas marium exundationes.

Recentiores autem Physici tantam observaverunt analogiam marinas exundationes inter & Lunae actionem, ut ex hôc solâ illas esse repetendas pronunciarent. At vero duplici modo Luna ciere potest aestum in aquis marinis, vel nempe coarctando mate=rie coelestis alveum, sicque maria ex=cavando, hocque opinio Carthesianorum est, vel aquas marinas attrahendo, ut censuit Newtonus.

Conclusio 1.ª

Luna est causa æstûs marini.

Prob.r Meritò Physici concludunt ex aëris pressione esse repetendam ascensionem & suspensionem hydrar=
=gyri in tubo Toricelliano, quia hæc suspensio accuratè sequitur oēs aëris variationes; Atqui marium ex=
=undationes ad motuum lunarium normam æquè accuratè componuntur; siquidem illæ sunt eò majores quò Luna est telluri propior, eò tardius accedunt, quò Luna tardius per meridianum tran=
=sit, & sic de cæteris phænomenis.
Ergo &c.

Conclusio 2.da

Luna quatenùs attrahit aquas, est causa æstus marini.

Prob.r Illa Lunæ actio est causa æstûs maritimi, quâ positâ expli=
=cantur illius æstûs phænomena, quâ verò sublatâ, ea intelligi ō possunt.

Atqui sic se habet attractio Lunæ in aquas marinas.

<u>Probatur 1ª Pars</u>: Sunt in æstu marino phænomena, quæ singulis diebus observantur; sunt alia, quæ singulis mensibus occurrunt; sunt denique alia quæ singulis annis observanda sese præbent: Atqui hæc tria phænomenorum genera intelliguntur posita Lunæ attractione in aquas marinas:

<u>Explicantur phænomena diurna.</u>

Phænomena æstus maritimi singulis diebus observanda possunt ad hæc revocari.

1° Unaquâque die bis intumescunt aquæ marinæ, bisque detumescunt.

2° Altitudo aquarum maxima non accidit in ipso transitu Lunæ per meridianum, sed tribus postea circiter horis.

3° intumescentia proindeque detumescentia tardius unaquâque die accidit quàm die præcedenti, tribus circiter horæ quadrantibus; Atqui hæc tria phænomena explicantur, positâ Lunæ attractione.

292. 1° qdm intelligitur quomodò aquæ marinæ bis intumescant, bisq detumescant. Luna enim directè trahit aquas sibi subjectas; Ergo Lunæ attractio imminuit illarum aquarum gravitationem in centrum telluris; insuper verò Luna obliquè trahit aquas hinc & inde positas in quadraturis; Ergo Luna urget earum aquarum gravitationem in centrum telluris; Atqui possunt aquæ quadraturarum fieri graviores, & aquæ conjunctionis fieri simul leviores, quin istæ ab illis attollantur. Ergo attollendæ sunt aquæ illæ, quæ Lunæ subjiciuntur, seu fiet intumescentia.

Porrò idem quoque in hemisphærio telluris opposito eventurum est. ~~hoc in hemisphærio~~ Nam aquæ in hemisphærio opposito magis à Luna distant quam telluris centrum; adeòq minùs à Luna attrahuntur quam centrum idem telluris; Ergo minuitur illarum gravitas in tellurem. Aliunde verò aquæ quadraturarum fiunt leviores. Ergo refluunt in illud hemisphærium, & idcircò aquas oppositas attollunt.

Ergo in hemispherio opposito aquæ etiam intumescunt; Ergo quoties Luna per meridianum transit, sive supra, sive infra horizontem, oportet aquas marinas intumescere: Atqui bis Luna unoquoque die transit per meridianum; Ergo bis unoquoque die intumescentia est excitanda; Ergo &c —

2.do Altitudo aquarum maxima in ipso Lunæ per meridianum transitu evenire non debet. Dum enim Luna est in meridiano, tunc aquas sibi subjectas facit leviores, aquarum vero in quadraturis positarum auget gravitatem; Ergo aquæ quadraturarum vi quadam acceleratrice aquas Sizigiarum attollunt; Atqui subito non sistitur vis illa acceleratrix, ubi primum Luna recedit a meridiano, ut patet. Ergo &c —

3.o Tribus circiter horæ quadrantibus unoquoque die quam precedenti æstus contingit. Tunc enim æstus accidit, cum Luna ad meridianum impellit; Atqui tribus circiter horæ quadrantibus Luna unoquoque die tardius quam die precedenti impellit &c. Ergo &c —

294. Explicantur phenomena menstrua.
Hoc enim præcipue observantur sin=
=gulis mensibus phenomena æstus mari=
=timi: 1.° Aquæ Polis vicinæ & ultra 65.^m
Latitudinis gradum nullum experiuntur
æstum:
2.° Majores sunt exundationes in
Lunæ Sizigiis, quam in quadraturis:
3.° Ex noviluniis & pleniluniis ad
quadraturam exundationes matutinæ ves=
=pertinis sunt majores; ex quadraturis
autem ad Sizigiis contrarium accidit:
4.° Exundationes maximæ eveniunt
nisi aliquot diebus post Sizigias Lu=
=nares, minimæ vero post quadraturas;
Atqui hoc omnia explicantur attractione
positâ.
1.° In aquis ad Polos accedentibus
nullus est æstus. Nam illæ nullo æstu
sunt agitandæ, quæ versus telluris cen=
=trum continuò comprimuntur; Atqui
sic se habent aquæ Polis vicinæ; siquidem
illæ perpetuò sunt in quadraturis respectu
Lunæ; Ergo &c.
2.° Major excitatur æstus, cùm aqua=
=rum utriusque hemispherii gravitas
in tellurem magis diminuitur; Atqui
cùm Luna est in Sizigiis, tunc

aquarum gravitas in tellurem magis imminuitur. Cùm enim Luna est in Sizigiis, tunc ejus attractio in aquas marinas magis conspirat cum attractione Solis {easdem in aquas; siquidem tunc aquæ utrique sideri subjectæ attolluntur per summam utriusque actionis: cùm autem Luna est in quadraturis, tunc aquas Lunæ subjectas deprimere in terram Sol nititur. Ergo tunc aquæ non attolluntur nisi per actionis utriusque differentiam: Ergo attractiones Solis et Lunæ in aquas marinas magis conspirant, cum Luna tenet Sizigias, quam cum in quadraturis versatur; Ergo in Sizigiis æstus major excitandus est quam in quadraturis.

3.° A Sizigiis ad quadraturas æstus matutini majores sunt vespertinis. Sizigiarum enim tempore majores ~~fiunt~~ cientur exundationes: Atqui hoc posito æstus matutini sunt vespertinis majores; siquidem æstus vespertini diutius decreverunt.

4° Exundationes maximæ evenient, nisi diebus aliquot post Syzigias lunares. A quadraturis ad Syzigias continuò crescunt marium exundationes; Ergo sisti repentè debent, ubi primùm Luna venit ad Syzigias. Ergo ipsâ die novilunii & plenilunii maxima exun=datio contingere debet.

Explicantur annua phænomena.

Duo sunt æstûs maritimi phænomena, quæ singulis annis observantur.

1° Majores sunt Æquinoctiorum qàm Solstitiorum exundationes.

2° Æstus maximi Æquinoctium ver=num procedunt, autumnale verò sub=sequuntur: Atqe utriusq phænomeni causa intelligitur, positâ Lunæ attrac=tione in aquas marinas.

1° qdm Æquinoctiorum tempore ma=jor est quam in solstitiis excitanda exundatio. Æquinoctii enim tempore magis conspirant attractiones Solis & Lunæ in aquas marinas quam in Sol=stitiis. Ergo æstus majores sunt exci=tandi.

2°. Æstus maximi procedunt Æqui=noctium vernum, & autumnale subse=quuntur. Tunc enim æstus maximi eveniunt, quando maxima est Solis & Lunæ attractio in aquas marinas: Atqui in Syzigiis Æquinoctium vernum procedentibus & autumnale consequentibus, maxima est Solis & Lunæ attractio in aquas marinas: siquidem hyeme, id est, ante Æquinoctium vernum & post Æqui=noctium autumnale minima est Solis a tellure distantia; Ergo &c.

Probatur altera Pars: Sublatâ attrac=tione jam non contingit æstus, nisi, quia tellus cingitur vortice ad lunam usque propenso, quem Luna deprimeret in transitu suo per meridianum; Atqui hoc explicatio non valet.

1°. enim falsum est Lunam inter & terram existere Vorticem, ut jam ostensum est.

2°. Etiamsi vortex ille existeret, non tamen esset deprimendus, dum Luna transit per meridianum; tum quia depressioni resistit vis centrifuga vorticulorum atque vorticis compositi

29°. -tellurem ambientis; tum quia si deprimeretur vortex, dum Luna transit per meridianum, tunc etiam aquæ marinæ deprimerentur: Atqui observationibus constat non deprimi, sed attolli aquas, dum Luna transit per meridianum. Ergo &c.

Dices. Si attractio lunaris valeret æstum ciere in aquis marinis, similiter quoque æstum in telluris atmosphærâ excitaret; siquidem major est atmosphæra quam marium fluiditas; Atqui tamen attractio illa similiter æstum in Atmosphærâ non excitat; Ergo &c.

Resp: 1° eamdem objectionem esse solvendam tum a Carthesianis, tum etiam a cæteris passim physicis, qui ex Lunæ actione quâcumque repetunt æstum maritimum.

Resp: 2°. Neg: Min: Admitti enim potest in telluris atmosphærâ æstus reciprocus maritimo æstui similis; siquidem ille nullis observationibus repugnat. Ergo &c.

Inst: Si daretur æstus in atmosphærâ, hoc esset modo altior, modo humilior juxta constantes vices; Atqui illud experimentis repugnat; Ergo &c.

Nego Min.

Inst: 2º Hydrargirum in tubo Torricelliano non est modo altius, modo humilius juxta constantes æstus maritimi vices; Atqui tn deberet sic esse modo altius, modo humilius si daretur æstus in atmospherâ, siqdm in tubo Torricelliano tum altius descendit hydrargirum, qdo altior est aeris columna superincumbens; Ergo &c

Dist: Min. Deberet hydrargirum modo altius, modo humilius, nisi gravitas atmosphera in tellurem imminueretur, dum altior fit atmosphera, Conc: Min: si gravitas imminuitur, cum atmosphera fit altior, Nego Min. & Consqt.

In tubo Torricelliano hydrargirum ideò ascendit, quia gravior est aeris columna superincumbens; Ergo licet altior sit ea columna, nisi fiat quoq gravior, jam attollendum non esset hydrargirum: Atqui dum per æstum attollitur aeris columna, non ea fit gravior; imo vero decrescit ejus gravitas: ideò enim altior fit columna, dum luna est in meridiano; qia tunc Luna telluris atmospheram attrahit. Atqui attractio illa Luna imminuit atmospheræ in tellurem gravitatem; Ergo &c

Quæres. Cur quædam sint maria, in q[ui]b[u]s vix ullus eveniat æstus?

Resp. Illud oriri ex eo quod maria quædam nimium distent à semitâ lunæ; quorum proinde aquæ perpetuò sint in quadratis r[e]sp[ec]tu Lunæ, ut circa Polos accidit: vel etiam ex eo q[uo]d maria quædam cum alio mari per angustiora freta communicant, q[u]am ut possint aquæ per istas angustias effluere, & Lunæ actioni obtemperare, tale est mare Mediterraneum, talis est sinus Adriaticus, &c. ——

Vide P. 247.

N: B: In y[e] Copernican System Mercury is placed at y[e] distance of about 32 millions of miles, and revolves round y[e] Sun in 87 Days, 23 hours & 16 Minutes. Venus at y[e] distance of about 59 millions of Miles, in 224 Days, 16 hours, 49 minutes. The Earth at y[e] distance of about 82 millions of miles, in 365 Days, 6 hours, 9 Minutes. Mars at the distance of 123 millions of miles, in 686 days, 23 hours, 27 Minutes. Jupiter at y[e] distance of 424 millions of miles, in 4332 Days, 12 hours, 20 Minutes, or almost 12 Years. Saturn at y[e] distance of 777 millions of miles in about 30 years ——

De Lumine & Coloribus.

Nulla forte obscurior est eâ questione, quæ in naturâ luminis explorandâ versa=tur, & propagatione explicandâ. Quoties luce fruimur, nostri oculi retina commo=vetur; sed hanc commotionem ratione variâ exponunt Physici, quorum præ=cipuas hic referremus opiniones.

I.° Affirmabat Carthesius lumen nihil aliud esse quàm materiam globu=losam ubique diffusam, in cujus centro Sol resideret. sole autem circa axem suum revoluto, hanc materiam continuò & in oem partem agitari, ita ut singula series globulorum a Sole ad oculum usque nostrum pertinentes, ex unâ extre=mitate acceptum motum citò ad alte=ram transferrent, & consequenter sen=sum visûs apud unumquemque nostrûm excitarent.

Die ultimo Maij. 1788.

302. 2.do Mallebranchius & Molierius cum Carthesio sunt uno ordine habendi; quamvis prior in locum globulorum durorum, quales finxerat Carthesius, substituendos esse elasticos duxerit: alter vero vorticulos globiculorum loco supposuerit.

Conclusio 1.a

Rejicienda est Carthesianorum opinio.

Prob.r Lumen quippe non uno eodemq temporis articulo propagatur, sed successive, quod quidem constat ex eo quod emersio infimi satellitis Jovis tardius conspiciatur, cum Tellus est Jovi conjuncta propiorq, quam cum est opposita, & consequenter ab eo remotior; Atqui tn uno indiviso temporis articulo fieret luminis propagatio, si illud oriretur ex globulorum aut vorticulorum pressione; ita, inquam, esset in Carthesiana hypothesi. Vel enim globuli illi finguntur duri, vel elastici.

Si sint duri, velut virga quadam

inflexibilis a Sole ad oculum protensa habendi sunt; se enim in hypothesi Carthesianâ proximè tangunt. Ergo eâdem in hypothesi non potest seriëi globulorum una extremitas commoveri, nisi altera simul & eodem tempore moveatur. Ergo &c.

Sin autem elastici globuli finguntur, nihil proficitur. Ut enim sic concipi posset propagatio luminis successiva, oporteret globulos, vorticulosve ex unâ quidem ~~parte~~ parte comprimi, alterâ autem extendi, idq fieri non simul, sed per aliquod spatium temporis; Atqui neutrum admitti potest in hypothesi, in quâ oia perfecte sunt plena. Ergo &c.

Duo sunt alia vitia, quæ in Carthesianorum opinione deprehendi solent. Viz. Si ex pressione materiæ globulosæ oriretur lumen, quacunq se ista pressio diffunderet, ibi quoq adesset lumen, & visioni locus foret. Porro inde sequerentur duo, quæ, experientiâ teste, omnino falsa sunt: nempè haud extingui lumen solis abscessu, rebusq & colorem, & nobis videndi facultatem manere etiam tum, cùm Sol infra horizontem delitescit;

 propterea quod fluida quolibet compressa in omnem partem elabendi conatus continuo exerunt, unde efficitur, ut materia globulosa infra horizontem pressa, etiam supra hori=zontem agitanda sit, ibiq; sensum visûs excitatura. Sequitur deinde, quemadmodum auditur sonus undequaq; etsi interponantur obstacula inter aurem & corpus sonorum, sic quoq; visum iri corpus quodlibet luci=dum, aliis licet corporibus inter ipsum & oculum objectis. Neque enim intelligi posse videtur in Carthesianâ sententiâ, quomodo lumen juxta lineam rectam propagari possit. Ergo &c.

3°. Juxta Newtonum lumen ex ipso Sole tanquam ex uberrimo fonte derivatur, estq; nihil aliud quam effluvium particula=rum solarium. Nimirum fingit materiam solis ob vehementissimum calorem in ipso Solis sinu fervere quam maxime, & inde tum ingenti ignium vi, tum vi centrifugâ depulsam in oia latè spatia cum incredibili celeritate effundi.

Multis sane hoc opinio difficultatibus patet, maximisq; quarum hoc sunt praecipua:

Viz. 1°. Videtur molem solis tandem lumi=nis jacturam minui oportere; emittit enim in Newtonianâ hypothesi singulis tempo=rum articulis uno minuto secundo brevioribus,

tot particulas lucidas quot requirun=
=tur ad implenda spatia cœlestia, ex
qbs partibus efficitur sphæra lucida
præmodum immensa, cujus Sol centrum
occupat: Atqui incredibile est tot par=
=tibus amissis, per tot annorum millia
eundem Solis molem manere potuisse.
2.do qemadmodum Solem minuendum
fuisse videtur, ita etiam cætera corpora
in spatiis cœlestibus revoluta crescere
in dies oportuit, acceptâ viz. Solis ma=
=teriâ. Vel si quis contendat lucem a
Sole in planetas emissam non planetis
aglutinatam fuisse, sed ab iisdem re=
=flexam atq rejectam, saltem haud facile
concipitur qomodo planetæ in suis mo=
=tibus materiam lucis ubiq diffusam
trajiciendo nunquam fuerint retardati;
nec videtur quo jure vacua appellet
Newtonus ea spatia, quæ partibus
lucidis opplentur.
Tertia difficultas ex eo desumitur, qod
nulla causa assignari posse videatur
vehementissimi fervoris, seu ebullitionis
violentissimæ, qam in Solis sinu con=
=stituit Newtonus, nullumq tanti ca=
=loris principium indicetur in Sole
quem novimus passim in naturâ
patrem caloris auctoremque esse.

Quarta difficultas est, quod nulla in Sole vis esse concipitur, quae ad infinitam prope distantiam, cum aequabili, incredibilique celeritate lumen emittere valeat.

Triplex enim tantummodo hujus rei causa afferri posse videtur: nempe vis centrifuga, quae particulis solaribus ob Solis rotationem inest, tum interna illa vis qua Solis particulae apud ipsum Solem agitantur atque ebulliunt, tum demum pondus Atmosphaerae, qua Sol cingi & comprimi dicitur, quaeque attractione Solis vehementissima in ipsum Solem agatur, sicque materiam luminis, per foramina seu meatus suos cogat effluere. Sed 1° difficulter omnino intelligitur quomodo lumen projici a Sole possit per vim centrifugam; haec enim Solis attractione vincatur oportet; alioquin brevi tempore ipsa Solis moles dissiparetur; praeterea observandum est Solem non posse circa suum centrum varie revolvi, sed circa eundem axem suum continuo rotari. Ergo vis centrifuga non in omnem partem radios projiceret, sed tantum juxta lineas solis axi perpendiculares, nihilque luminis proinde emitteretur in eam coeli regionem, quam

Poli solares spectant. Insuper oẽs circuli Solis Æquatori paralleli o eandem habent vim centrifugam, ea quippe in circulis minoribus, magisq ad Polos accedentibus multo minor est; Ergo lucis radii ab his circulis emissi, cum multo minori velocitate procederent. 2° difficulter etiam luminis emissio tribui potest Solis <u>ebullitioni</u>; tum quod nullum concipi potest in Sole ebullitionis princi=
=pium, praesertim admisso Newtoni syste=
=mate; tum quod ille aestus quo partes Solis fervere supponuntur, tum videatur posse eas in tenuissimos vapores dividere, ita ut tenuiores a centro Solis recedant longius, oesq circa Solem disponantur secundum ordinem gravitatis specificae. 3° Certum videtur radiorum ejectionem ponderi atmos=
=pherae solaris tribui o posse. Quamvis enim hac atmosphaera velut lamina quaedam per=
=forata haberetur, nihil aliud Solem com=
=primendo valeret efficere, nisi ut parti=
=culae solis fluidae ipsius mestus subeun=
=tes pressionis vitandae causa, ad summum usq ejusdem Atmosphaerae assurgerent, ibiq consisterent, cum se illius pressioni sub=
=duxissent. non alius esse potest compres=
=sionis Atmosphaerae effectus, quem admo=
=dum ex fluidorum theoriâ & experientiâ novimus.

Quinta difficultas ex eo oritur, quod unum idemq objectum ex oibus circum locis æquè distinctè & clarè eodem tempore conspicitur, quodq maximus coeli tractus per foramen acûs perspicuè videri potest. Atqi istud contingere nequit in Newtoniano systemate; lucis enim effluvia seu ab ipso Sole profecta, seu a variis corporibus in oem partem reflexa in se perpetuo incurrere, seq invicem perturbare necesse est; unde maximam confusionem nasci oportet.

4.° His difficultatibus permotus apud nos (Gallos) clarissimus Nollet, Lect: Tom. 5.° opinionem Carthesiano simillimam amplectitur; Viz. materiam lucis in spatiis cœlestibus disseminatam censet, non ita ut cuncta perfecte repleat, quoq enim notum est lumen ab ultimo Jovis satellite emissum, 7 circiter minuta insumere in percurrendâ orbitæ terrestris diametro, sed ita ut ex Sole ad nostros oculos pertingant globulorum series elasticorum exiguis intervallis a se invicem distantium. Primi igitur globuli a Sole pressi motum suum in subsequentes transferunt, isti in alios, &c, donec commoto oculo sensus videndi in nobis excitetur.

Non dissimulat qdm sagacissimus Scriptor multas et iis difficultatibus, qbs impugnatur Carthesius, sibi etiam esse solvendas; sed putat objecta sibi phænomena, in systemate Newtoniano, quam in suo, longe difficilius explicari. Tria recenset præcipue: — —

Primum est illud, et quo quinta adversus Newtonum difficultas eruitur, de quo sic habet: „On vous fait voir pendant la nuit „une partie considérable du ciel par „un trou d'epingle, & l'on vous dit: Est il pos= „sible que la petite portion de lumiere qui „remplit ce trou; recoive & transmette „distinctement les mouvemens imprimés „par tant d'Etoiles à un nombre egal „de files de globules? A quoi je reponds: „Est il plus aisé de croire que ce trou „tout petit qu'il est, devienne le passage „commun d'autant de petits torrens de lumieres, „qui coulent avec une rapidité inexpri= „=mable, qui s'y croisent sans se confondre, „& qui s'y heurtent sans rien perdre de „leur premiere direction? quelque partie „qu'on prenne, il y a certainement de „quoi s'etonner, mais le premier des deux me „paroit moins violent.“ —

Retorquet igitur argumentum Vir doctissimus, sed minime respondet. —

Alterum est lucis & tenebrarum alternas esse vices, divisumque imperium, cum nullibi videretur tenebris locus dari posse, si materia luminis oia spatia repleret; propterea quod fluida compressa, ubique solent agitari, & juxta oem directionem. —

Huic autem argumento respondet, aliter pronunciandum esse de liquore in vase contento, ac de fluido in spatiis cœlestibus longe lateque diffuso; in vase liquorem compressum ubique agitari ob parietum reactionem, in mundo autem nihil esse quod cum angusti vasis parietibus comparari liceat. — — —

Præterea idem auctor experientiâ radii solaris in cubiculo obscuro recepto utitur ad probandum luminis pressionem non solummodo juxta lineam rectam, verum etiam ad latera, etsi multo minus, exerceri. Radius enim inquit, in cubiculum intromissus, ex oibus cubiculi punctis cernitur. Ergo lucis materia in cubiculo comprehensa, ubique paululum agitatur. Objicientibus vero quibusdam ideo lucis radium videri, quod reflectatur per atomos pulveris in cubiculo volitantes, reponit

lucis radium videri posse, etiamsi tubum trajiciat prorsus aere & consequenter quocumque atomis vacuum; Atqui tunc, ait, in ista hypothesi nulla potest esse reflexio: Ergo &c.

Tertium phœnomenum eidem auctori, quemadmodum & Carthesio solvendum, est luminis propagatio ad lineam rectam. Recta enim projici radios a Sole nullo labore intelligitur in systemate Newtoniano; verum fingi non potest globulos lucidos vel a Sole, vel a quocumque corpore lucido agitatos, esse omnes super eadem linea recta dispositos.

Nodum hunc minime resolvit Gallicus scriptor; sed huic aliam difficultatem, quam in systemate Newtoniano, & merito quidem, arbitratur esse maximam: nimirum luminis radium in quodcumque planum incidentem reflecti juxta angulum angulo incidentiæ æqualem. Nulla enim est superficies in omnibus suis punctis perfecte plana ac perpolita, nulla quæ non in partibus multis excavetur, in multis promineat. Igitur plurimorum radiorum in eadem superficiem incidentium simul, multiplex est variusque angulus; Ergo dum reflectuntur radii unum lucis fasciculum componentes, iidem separandi essent ac dispergendi.

Unde concludit o felicius Newtonianum systema qam Carthesianum defendi posse.

Utitur etiam comparatione soni, qui, patentibus oibus, ipso aere vehitur, qui ttn per Echo ita reflectitur, ut o in oia pariter vicina loca vocis imago reddatur.

5.° demum novas de lumine observationes fecit Maratus jam apud nos famâ notissimus duplici opere, in quo novum systema tum de igne, tum de electricitate proposuit. Is opusculum publicavit, cui titulus Notions elementaires d'Optique, amplioris operis pronuncium, in quo enucleatius explicanda & uberius confirmanda sit tota auctoris theoria circa luminis originem & naturam & propagationem, tum circa ejus refractionem, reflectionemq. Interea autem nova illius opinionis summam, qualis in predicto opusculo exponitur, hic referre juvat.

Primum censet diligentissimus scriptor lumen nequaqam ex Sole profluere, sed diffusum semper manere in spatio, non oio quiescens, sed aliqantulum agitatum, ut oculorum debilium fibras paululum commovere possit; & ex eo

confirmat, quod multi ophthalliâ laborantes reperti sint, qui in mediâ obscuritate objecta cernerent; et eo etiam quod qui in carceribus altis diei prorsus inaccessis jam pridem languent, tandem reptantia circum se insecta distincte videre incipiant; et eo demum quod quidam albi Americæ incolæ vulgò dicti Négres blancs, melius noctu qam interdiu objecta perspiciant.

2.do Negat tn id quod Carthesio visum fuit, lumine oia perfecte repleri, pp̃ter argumenta afferri solita.

3.° Affirmat, facillimisq experi=mentis probat, unumqodq corpus suâ cingi atmospherâ lucidâ; qod materia luminis attrahi se facillime patiatur, ideòq se densiori cujuslibet corporis superficiei applicett.

4.° Lumen unumquodq corpus ambiens, (quod partes luminis heterogeneæ sint, variamq habeant cum proximis cor=poribus affinitatem) prope circumfe=rentiam seu prope contactum decom=poni; proinde fasciculum prope corpus transeuntem, hîc paululum inflecti;

314 -[illegible] à suo tramite deviare, sed radios qbs constat, o deviare eodem modo.

5.° Radios primigeneos, heterogeneosq non septem numero, quemadmodum placuit Newtono, sed tres ttmmodo esse, Flavum nempe, Rubrum & Cœruleum; horum primum maxime facillimeq deviare, minime e contrario, difficillimeq Cœruleum, Rubri igitur deviationem inter illos mediam esse; cœterum inter horumce trium radiorum deviationes rationem manere constantem.

6.° denique radios oes diversa media trajicientes æqualiter refrangi, quod maxime contra Newtonum est. Hinc enim sequitur radios objectum prisma permeantes non refractione decomponi ac dividi.

Cœtera quæ tum ad hujus systematis expositionem, tum ad aliorum examen disceptationemq pertinent, ob temporis angustias scripto tradere omittimus, sed familiari sermone, qam diligentissime licebit, explicabimus; unum hisc adponentes, viz. nobis Newtoniano systemate, partim Nolletti, partem Marati systema multo jucundius arridere.

Nunc o͞is de Lumine disputatio, quæ optica generalis solet dici, in tres partes dividitur, nempè Opticam p̃priè dictam, q͞ꝰ visionis phænomena explicat, Dioptricam quæ est scientia luminis refracti, & Catoptricam, quæ tractat de luminis reflexione. De triplici hâc parte Notiones quædam tradendæ sunt.

Elementa Opticæ.

Phænomenon primum.

Lumen debilitatur secundum rationem quadrati distantiarum.

Explic.: Unumquodque punctum corporis lucidi undiq; conspicitur; lumen igitur ex illo profectum, in modum coni extenditur & propagatur. Ergo eadem vis materiæ lucidæ impressa, dum à puncto lucido receditur, pluribus communicatur moliculis; Ergo debilitatur moliculorum motus, quemadmodum crescit soliditas coni lucidi, cujus apex in ipso puncto lucido est. Atqui soliditas singulorum elementorum

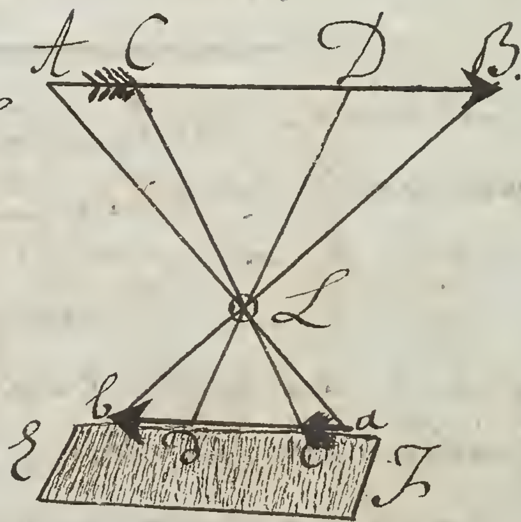
istius coni, est ut quadratum distantiæ in quâ versantur ab ejusdem coni apice, ut facile demonstrat Geometria. Ergo &c.

Hinc ad distantiam duplò majorem, quadruplò minus clare objectum perspi=citur.

Phænomenon 2[dum].

Si luminis fasciculus in cubiculum obscurum immittatur per foramen exi=guum, foraminiq opponatur charta, in hâc corpora externa depinguntur inversâ imagine.

Explic.^r Consideretur objectum AB lumen transmittens per foramen L in chartam EF; quoniam radii luminis semper li=neam rectam sequuntur, evidens est imaginem puncti A transferendam esse in a, pariterq imaginem B in b; simili raone C oportet depingi in c, D in d, &c. Ergo &c.



Hinc concludendum oium, qꝰ videmus imagines, in fundo oculi situ inverso dis=poni.

Phænomenon 3.^m

Quamvis in fundo oculi externarum rerum imagines inversæ resideant, nihil tn ordine inverso videre solemus.

Explic.^r Sunt 1° qui existimant ideo singulas res videri a nobis solere inverso situ, seu potius judicari, quod oculorum errorem quotidiana experientia, hoc est, cæteri sensus, præsertim vero tactus corrigat. 2° dicunt nonnulli unum errorem altero emendari, viz. quemadmodum res externas unicuique, ita quod seipsum sibi inversum videri; proinde comparatum sui, rerumque omnium situm, eundem esse prorsus, ac si nihil cerneretur inversum.

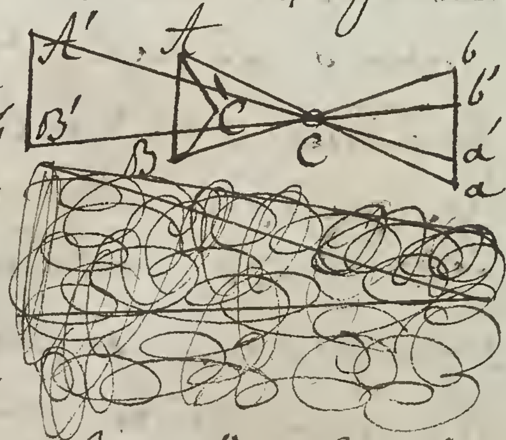
Nos vero utraque expositione parum contenti, arbitramur in proposito phænomeno nihil difficultatis esse. Sit enim fundus oculi E F, pupilla oculi sit L, res autem objecta exterius, A B. Jam vero pars oculi a receptam puncti A imaginem referre debet ad idem punctum A; similiter pars oculi b receptam imaginem B, juxta lineam B b, non potest quin referat ad idem punctum B, et sic de cæteris oculi partibus. Ergo quamvis

objectum A B in oculo fingatur in=
=verse, naturale oio est, ut idem objec=
=tum in vero suo situ videatur. Et vero
numquid coecus dextrâ manu baculum
tenens, eoq corpora ad sinistram constituta
explorans, ꝯ hoc ad sinistram refert,
vicissimq ad dextram ea quo manu si=
=nistrâ tentaverit in latere dextro? –
Ergo similiter potest oculus ad sinistram
referre imaginem, quâ in parte dextrâ
commotus fuerit, & vicissimq &c.

Phænomenon 4.^m

Corpora eo minora videntur quo in majori
sunt distantiâ ab oculo.

Explicat.^o Pendet magnitudo imaginis sub
quâ objecta cernuntur ex visionis angulo,
seu angulo optico, nimirum radii A par=
=tibus extremis objecti A B
ad pupillam oculi pervenientes,
seu ad punctum C, ibi sese
intersecant; angulusq b C a
visionis angulus, seu opticus
appellatur. Erit autem major,



proinde major etiam erit anguli istius basis
b a in fundo oculi constituta, quo linea A B,
quo constans est, minus distabit a puncto C;

& vice versâ. Ergo radiis ab objecto AB emissis, iidem objectum propius fit, major oculi pars commovebitur. —

Potest objectum AB adeo removeri, ut fere nullum appareat. Si enim V: G: fiat A′B′, tunc qam minimus erit visionis angulus; proinde puncta A′ & B′ concurrere videbuntur. —

∴ Hinc causa intelligitur ob quam duae lineae parallelae ad magnam distantiam productae, sibi tandem occurrere videantur.

Scholium Im.

Multum abest tn quin magnitudinis imminutio in eadem ratione fiat, ac anguli optici: Si enim V: G: oculus constitueretur in C′, in distantia duplo minori ab objecto AB, angulus visionis C′ foret duplus: Atqi tn objectum AB non duplo majus appareret.

Scholium 2dum.

Ut augeatur magnitudo objectorum, augendus est visionis angulus, hoc est, efficiendum ut ~~conv~~ radii visuales magis convergant accedendo ad oculum; quod fieri solet interjecta lente vitrea; de qua re aliqid paulo post dicturi sumus. —

Porro ut minuantur objecta, radii visuales, antequam ad oculum perveniant, sic excipiendi sunt, ut minus convergant, sicq minor evadat visionis angulus, quod vitro efficitur concavo. —

Phænomenon 5.m

Cœlum suspicienti objicitur species sphæræ concavæ, quæ tn versus Zenith paululum depressa, versus horizontem latior amplior q apparet. —

Utrumq explicatr. Corporum distantias solemus æstimare non solum ex angulo optico, verum etiam ex rebus distincte inter objecta & oculum collocatis. Judicamus nempè rem conspectam eò majori intervallo à nobis esse sejunctam, quò plura distincte videmus corpora inter nos & illam interja=centia. Unde fit ut objecta eminus visa in eadem ponamus distantiâ, quoties hæc nullis rebus intermediis possumus à se invi=cem distinguere. Ergo ipsa corpora cœlestia oportet videri à nobis quasi æque distantibus cœli punctis affixa, ac consequenter velut ejusdem sphæræ concavitati illigata. Verumtn inferio=res istius sphæræ partes remotiores videri debent, propterea quod inter has & oculum in ipsâ superficie horizontis multa circumspiciantur corpora disposita;

dum nulla e contrario ab oculo ad Zenith observamus.

Hinc explicabis qamobrem Sol vel Luna cum oriuntur, majores appareant, quam cum ad meridianum appellunt. Cum enim hoc cor=pora judicentur a nobis remotiora, cum incipiunt supra horizontem assurgere, ob terrarum tractus interjacentes quam cum nos=tris capitibus fere imminent; cumque aliunde sub eodem cernantur angulo optico, ob con=stantem eorum magnitudinem, necessum est ut longius constituta judicentur prope horizontem, quam vergentia ad Zenith. Nam quotidiano usu didicimus, dato visionis angulo, non posse majorem esse distan=tiam, nisi magnitudo sit amplior.

Phænomenon 6m.

Quamvis in utroque oculo objectorum imago exhibeatur, nulla tamen duplicia videntur.

Explicr. Etsi ipsi e singulis corporibus radii, eorumque colores ad oculum perferentes, nervum opticum æqualiter commovent in utroque oculo; quoniam et radiorum vis et utriusque nervi optici tensio est eadem. Vibrantur itaque isti nervi ad eosdem numeros; porro talis concentus unicam visionem parit. Verbo dicam ut editum sonum unico sensu, quamvis utraque aure solemus excipere, ob

 similem prorsus auris utriusq commo=
=tionem, simultaneamq; ita non mirum est
radios luminis duplici licet oculorum
januâ ad animum introductos, unicam
ipsi deferre imaginem. ——

Confirmatur hoc explicatio ex eo, quod
mutatâ nervi alterius optici tensione
dup videatur objectum, si nempe digito
alter oculus comprimatur, vel si inter=
=jecto vitro cujus extima superficies plu=
=ribus latusculis sit distincta, mutetur
fiatq multiplex radiorum ex eodem cor=
=pore venientium obliquitas; sic enim
radiorum vis fit diversa, variaq fit
impressio in oculum; proinde multiplicem
oportet in animo visionis sensum exurgere.

Phænomenon 7.^m

Si quis ex apertâ luce in locum obscurum
transierit, is densâ caligine illicò circum=
=funditur; paulatim in loco assuefactus res
circumpositas distinguere incipit. Quod
si ex specu in lucem apertam evaserit, ita
luminis fulgore percellitur, ut primum ni=
=hil oīo distinctum cernat, sed omnia
sensim sine sensu distincta videri in=
=cipiunt. ——

Explicat.^r Cum quis apertâ luce fruitur,
multos simul radios excipit, ejusq pupilla
nec nimis contrahitur, nec nimium dilatatur.

Cum vero idem obscurum locum subit rariores multisq reflexionibus debilitatos excipit radios. Facit igitur videndi cupido, ut pupillam dilatare suam, nervumq opticum accuratius tendere conetur. Quod non illico, sed paulatim assequitur. Ergo circumjacentia corpora oportet paulatim ipsi apparere.

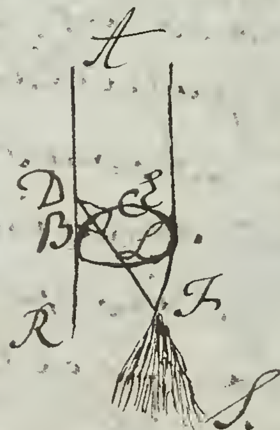
Ex tenebris vero emergenti jam lumen ei non parce conceditur, sed subito affluit ingens radiorum copia, ut ipsius nervus opticus vehementius qam par est, commoveatur, oculusq non tam illuminetur qam laedatur. Ergo illi necesse est contrahere pupillam, sicq facere ut minus qam antea nervus opticus tendatur. Pupilla igitur sensim sine sensu retracta, nervoq optico relaxato, omnia circumjacentia objecta facile atq distincte videri incipiunt.

Dioptricæ Elementa.

Phænomenon 1.um

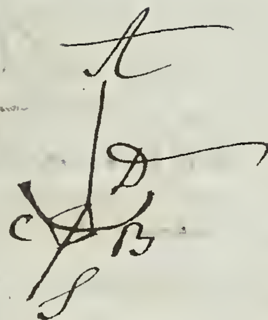
Si intra cubiculum occlusum immissus radius exiguo aperto foramine excipiatur vitro seu convexo seu concavo, videtur paululum a suâ viâ deflectere, accedendo ad lineam vitri superficiei perpendicularem.

Explicatur. Sit directio radii ABR, huic opponatur lenticula EL convexa: jam vero accedens radius ad punctum B, statimque atque sphæram attractionis vitri attingit, v. g. dum est in D illi attractioni subditur; proinde attrahitur in C. Ergo jam inter duas vires constituitur, nempe DB & DC; ac consequenter sequi cogitur diagonalem, atque a primâ directione AB deviare juxta lineam DS. Atqui DS magis accedit ad lineam vitri superficiei perpendicularem. Ergo &c.



Quod si oppositum vitrum superficie sit concavâ, radius ad vitrum accedens

attrahitur et D in C, & constitutus inter duas vires DC & DB sequitur Diagonalem DS, quo ad perpendicularem ac=cedit ductam ad su=perficiem vitri in puncto C.



Corollarium

Radii luminis vitrum convexum trajici=entes, magis qam antea convergunt, emersiqꝫ ex vitro, in aliquod punctum concurrunt, quod focus appellatur. Porro iste focus ma=gis minusve a lenticula vitrea distat, qua minor majorve fuerit illius convex=itas. Minus proinde distabit, si vitrum ex utraqꝫ parte convexum fuerit, qam si ex una qdem parte convexum, et altera vero planum. Emergentes enim radii ex convex=itate vitri, ob vitri attractionem, magis versus perpendicularem inflectuntur, proinde citius debent concurrere.

Si autem vitri superficies sit concava, radii ex vitro emergentes, magis qam antea divergunt, ut satis per se intelligitur.

Scholium.

Coadunatorum ope lentis vitreæ radio=
=rum tanta vis est, ut corpora objecta ad
focum facile incendere valeant, imò ut du=
=rissima metalla, ferrum, argentum, aurum &c
celerrime fundant.

Phænomenon 2.dum

Objecta majora videntur, si trans vitrum
convexum, quàm si nudis oculis conspiciantur;
trans vitrum autem concavum minora vi=
=dentur.

Explicatur. Sit oculus propè focum F
constitutus. Radii ex A & H venientes in lentis
transitu refranguntur juxta lineas BF & GF.
Ergo punctum A videtur in A', & H in H'. Proindè
majus objectum AH videndum est.
Contra verò si vitrum sit concavum, profecti radii
ex A & H refranguntur juxta lineas DI & GN.
Proindè punctum A refertur in A', & H', & sic
minus apparet AH.

Corollarium.

In microscopiis lenticulæ adhibendæ sunt
maximè convexæ & orbæ quàm minimæ.

Nam quò major est lentis convexitas, eò magis convergunt radii emergentes; eoq; magis proptereà augentur objecta.

In Telescopiis autem lens objectiva adhibetur, quæ sit vel ex unâ ttm, vel ex utrâq; parte convexâ, & majoris sphæræ segmentum, ita ut focum remotius habeat, imaginemq; objecti longius post sese rejiciat.

Phænomenon 3^{m}.

Alii inter hoes remotiora objecta vident; alii autem ttmmodò proxima distinctè vident, unde priores Presbytæ, alii autem Myopes vocantur.

Explicatr. Ut intelligatur istuis phænomeni explicatio, brevis oculi descriptio tradenda est.

Constat autem oculus ex diversis tunicis & humoribus. Tunica extrema atq; interior cornu pellucidum imittatur, qod ipsi corneæ nomen fecit. Huic alia connectitur posterior & concava, qm vocant Scleroticam, quoque majorem oculi partem involvit. Corneæ subjacet Uvea; cujus in medio rotundum foramen est pupilla nuncupari solitum. Uveæ annexa est Choroides Scleroticæ contigua. Post hanc Retina extenditur, tenuissimis nervi optici contexta fibris,

quo a Choroide separata in massam muscosam conglobatur, sed intra aquam agitata, lintei admodum expanditur. Maximam oculi cavitatem, postremamq occupat humor vitreus; mediam sub pu=pillâ humor crystallinus instar lentis utrinq convexae; porro anteriorem cavi=tatem inter humorem crystallinum & corneam replet humor aqueus.

Jam vero apud varios homines major minorve oculi totius, ac praecipue crystal=lini, qui lenti simillimus est, convexitas facit, ut plus minusve lucis radii refrin=gantur, quo oculum trajiciunt; utq idcirco trans oculum propius longiusve concur=rant; porro objectorum imago in eo puncto depingitur, ubi concurrunt luminis radii. His positis, remotiora tum objecta iis clare & distincte nitent, apud quos minor est crystallini convexitas. Radii quippe ex propinquo objecto venientes nimium di=vergunt, quam ut per crystallinum refracti in ipsa retinâ congregentur. Siquidem ob crys=tallini convexitatem minimam parum omnino refringuntur, proinde parum a suâ direc=tione deviant; propterea eorum concursus punctum est ultra retinam, & extra oculum positum. Profecti autem ex remoto objecto radii angulum opticum faciunt exiguum; proinde ad crystallinum appellentes parum divergunt.

Exiguâ igitur refractione intra ipsum ocu=
=lum, ipsaq in retinâ possunt concurrere.

Vice versâ, facile intelligitur qamobrem ii in qbs major est crystallini convexitas, propinqua solummodo objecta clare & distincte videant. Nimia enim convexitas tantam refractionem parit, ut nisi radii luminis ad crystallinum pervenientes max=
=ime divergant, ante coadunentur qàm ad retinam devenerint. Hi ergo proxima objecta solummodo possunt distincte videre, remota autem confuse conspi=
=ciunt.

Scholium 1.^m

Homo idem variis in ætatibus objecta aliter videt, quia oculi formam mutat dies. Solent enim Presbytæ esse senes, pptereà quod progrediente ætate minui=
=tur crystallini convexitas, humoresq attenuantur.

Scholium 2.^dum

Quoniam sæpe necesse est ut objecta tum vicina tum remotiora cernantur, crystallini convexitatem sive augere sive minuere, oculorumq orbem huc & illuc variè inflectere, hos naturæ auctor sex præcipuè musculis alligavit, qui nunc relaxantur, nunc contrahuntur.

Ex his quatuor pone oculum constituti, vocantur recti. Duo autem alii, quorum est unus in interno, alter in externo oculi angulo, vocantur obliqui. Rectorum est oculum attollere, vel demittere, obliquo=rum autem ad dextram aut ad sinistram ratrahere. Sed proterea recti id premendo retrorsum efficiunt, ut quando opus est, crystallini convexitas minuatur, sicq longinqua objecta videri possint, obliqui autem ex utroq latere oculum contrahentes, crystallini convexitatem adaugent, ut proxima videantur ob=jecta. Verum ii, in qbs natura satis convexitatem oculi augere vel mi=nuere non potest, arte juvandi sunt.

Corollarium.

Myopes igitur vitro indigent concavo, ut radiorum concursus seu focus non intra oculum hereat, sed ad oculum usq protendatur. Presbyto vero ut ne ultra oculi retinam transferatur focus rerum imaginem ferens, vitro convexo opus habent.

Scholium 3^m.

Lentes seu convexa seu concava plerumque adhiberi solent, quæ sphærarum segmenta sint. Dicuntur 2 vel 3 vel &c diametri pedes habere, cum pertinent ad sphæras, quarum diametri sint duorum vel trium vel &c pedum.

Scholium 4^m.

Demonstratum a Newtono est Opt: lib. 1°. Prop. 6.â constantem esse rationem inter sinum anguli incidentiæ, & sinum anguli refrac=tionis. Hæc autem ratio primum credebatur esse = 5 : 4; qui error celeberrimum Dollun=dum in Angliâ vitris elaborandis ~~stu~~ stu=diosissimum, peritissimumque aliquamdiu re=tardavit. Sed repetitis experimentis hanc rationem talem esse qualem diximus, confir=mavit imprimis Clairault; deque eâ jam nullum est inter Physicos dubium. Ra=tionis hujus constantiam demonstrat quoque Mussembroek Phys: suo Tom: 2°. Estque illa totius Dioptricæ ~~principium~~ fundamentum.

Porro angulus quem directio radii in vitrum incidentis facit cum perpendiculari in superficiem vitri ad idem incidentiæ

 punctum perducta, angulus incidentiæ dicitur.

Angulus autem perpendicularis ejusdem cum directione radii refracti, vocatur angulus refractionis.

Jam vero punctum in quo, post vitrum trajectum concursuri sunt radii sub quocunque incidentes angulo varii Geometræ inquisierunt, inter quos consuli possunt Mussembroeck, Sgravesande, Guisne in Memoriabilibus regiæ Scientiarum Academiæ A: 1704, Mallebranchius Recherche de la Verité tom. 4.

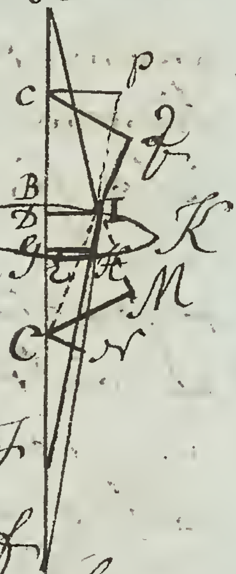
Mallebranchii hic formulas, cum ejusdem demonstrationibus referre juvat. Itaque sit

Problema.

Datâ vitri alicujus sphærici convexitate, aut etiam concavitate, seu vitrum utrinque sit convexum aut concavum, idque sive æqualiter sive inæqualiter, seu ex unâ parte convexum sit, ex alterâ concavum, seu denique ex unâ parte planum, ex alterâ convexum aut concavum; invenire in ejus axe punctum concursûs radiorum ex eodem corpore lucido profectorum, bisque trajectu vitri, Viz. tum in ingressu tum in egressu

refractorum; hoc est, invenire locum imaginis corpus lucidum exhibentis? —

Solvitur. Agitur hic tantum de radiis, qui ab objecto ad vitrum juxta vitri axem propagantur. Qui enim ab axe sunt remotiores, non distinctam afferunt, sed confusam objecti imaginem. —



Jam fingantur radii ex A profecti; sit BK arcus circumferentiae, ad quam pertinet convexitas superior lentis, sitque hujus semidiameter CI; incidat radius luminis in punctum I puncto B proximum, sic ut lineae AI, AD, AB aequales haberi possint. Ducatur perpendicularis CM in radium AI, qui dempta omni refractione produceretur in M: Demittatur etiam ex eodem centro C perpendicularis CN in radium semel refractum If; duae istae Normales, sinus angulorum incidentiae & refractionis exhibebunt; CM viz. sinus erit incidentiae, & CN sinus refractionis. Proinde habebitur illa proportio: CM : CN :: 3 : 2. —

Unde si fiat sinus CM = s, erit refractionis sinus CN = $\frac{2s}{3}$. —

Nunc ex puncto f ubi radius per solam refractionem, quae locum habet in ingressu I interruptus cum axe concurrit, ducatur linea fIP; ex puncto autem H, ubi secunda refractio fit, agatur in axem proximum perpendicularis HG, quemadmodum ex puncto I perpendicularis ID.

Praeterea sit c centrum convexitatis inte=
=rioris KHEL: ex hoc centro normales agan=
=tur c P in directionem fHI radii per pri=
=mam refractionem reflexi, & c Q in direc=
=tionem FQ radii ejusdem bis refracti; erunt
istae lineae cP & cQ sinus angulorum inci=
=dentiae in aerem seu emersionis e vitro, &
refractionis, quae locus habet in transitu
ex vitro in aerem, hoc est, ex medio densiori
in rarius. Proinde isti sinus erunt
inter se ut 2 : 3.

His promissis, duo puncta invenienda
sunt. Primum f, ubi concurrerent radii,
si una fieret refractio, hoc est, si vitrum foret
plano convexum: alterum F, ubi oportet con=
=currere radios bis refractos, hoc est, e
vitro exeuntes, cujus utraque superficies sit
curva.

Itaque appellatur d distantia objecti AB:
radius circumferentiae LBIK, nempe BC
vel CI, sit = r: sit demum quantitas Bf,
quam quaerimus, = x.

Ob triangula similia ADI, ACM, ha=
=betur proportio AC : AD seu AB :: CM : DI;
sive $d+r : d :: s : DI = \frac{sd}{d+r}$.

Item ex triangulis similibus DIf, CNf,
eruitur ...... Df seu Bf : fC :: DI : CN;
algebrice ..... $x : x-r :: \frac{sd}{d+r} : \frac{2s}{3}$;

Unde $\frac{2sx}{3} = \frac{xs\partial - rs\partial}{\partial + r}$; ——
ac demum $x = \frac{3r\partial}{\partial - 2r}$. ——

Antequam inquiratur punctum F, opportunum est corollaria quaedam ex formulâ inventâ deducere. ——

Itaq 1°. Ex illis tribus x, r, ∂, duo si dentur tertium nullo negotio obtinebitur. ——
Hinc erit ...... $\partial = \frac{2rx}{x - 3r}$, ...
.... $r = \frac{x\partial}{3\partial + 2x}$. ——

2°. Supponi potest $\partial = 2r$, tum autem prima aequatio fiet $x = \infty$, sicq nullus erit con=
=cursus, radiiq emergent paralleli. ——

3°. Si est $\partial > 2r$, radii post vitrum con=
=current, hoc est, infra lentem constitutum erit punctum F, ut videre est in figurâ: quod si fingatur $\partial < 2r$, erit tunc valor x negativum; proinde radiorum concursus intra lentem fiet, eritq superior puncto A; radii consequenter etiam post refractionem divergere non desinent. ——

4°. Si $\partial = \infty$, prodibit $x = \frac{3\partial r}{\partial} = 3r$. ——

5°. Sin autem r est infinitus, hoc est, pla=
=num est vitrum, habebitur $-x = \frac{3\partial}{2}$. Punc=
=tum igitur concursûs F altius erit puncto A; nempe radii, trajecto vitro, etsi minus quam ante divergent &c. — Nunc Problematis solvenda venit pars altera; viz. invenien=
=dum est punctum F, ubi se radii post 2dam refractionem intersecant; seu quaeritur quantitas $EF = z$. ——

Sit igitur lentis vitreæ crassitudo BE = e; E f, seu G f, seu iterum H f = y; radius con=vexitatis inferioris LEHK, viz. Ec = a; sinus cP anguli incidentiæ radii per primam refractionem rupti, & per punctum H exeuntis e vitro sit = t.

Ut antea observatum est, utque experientia do=cet, oportet esse cP seu $t : cQ :: 2 : 3$ ....

Ergo $cQ = \frac{3t}{2}$.

Propter similia triangula fcP & fGH,

$fc : fE :: cP : GH$, ...

Id est .. $y + a : y :: t : GH = \frac{ty}{y+a}$.

Similia etiam triangula FcQ, FGH illam proportionem suppeditant $cQ : GH :: Fc : FG$ seu FE,

id est $\frac{3t}{2} : \frac{ty}{y+a} :: z + a : z$;

unde $\frac{3tz}{2} = \frac{tyz + aty}{y+a}$;

atque hinc demum $y = \frac{3az}{2a-z}$ ....

Atqui y seu Ef = $x - e$.

Ergo ..... $x - e = \frac{3az}{2a-z}$.

Sed jam suprà erat $x = \frac{3rd}{d-2r}$;

hoc igitur valore substituto, invenietur

$$z = \frac{6ard - 2aed + 4are}{3ad + 3rd - ed + 2er - 6ar}$$

Neglectâ autem, ut sæpe fit, crassitudine vitri, deletisque idcircò omnibus terminis, in quibus factor est e, erit

$$z = \frac{2ard}{ad + rd - 2ar}$$

Hinc 1°. ex his quatuor, z, a, r, d, si tria habentur, quartum continuò erit obvium. Viz. invenietur $a = \frac{rzd}{2rz+2rd-zd}$, ...

.... $r = \frac{azd}{2az+2ad-zd}$, ...

.... $d = \frac{2arz}{az+rz-2ar}$.

Hinc 2do. si $d = \infty$, hoc est, si radii incidant paralleli, fiet $z = \frac{2ar}{a+r}$.

Quod si æquales sint ambo convexitates, seu si est $r = a$, tunc erit

.... $z = r$.*

Si autem dum $a = r$, distantia d non sit quam maxima, tunc habebitur

.... $z = \frac{r-d}{d-r}$.

Hinc 3°. &c.

Scholium.

Hactenus actum fuit de vitris aut ex unâ parte aut utrinque convexis. Verùm ad vitra etiam concava inventæ formulæ accommodari possunt.

338. Sic ad vitrum concavum ex eâ parte quo obvertitur objecto, ultimus valor quan=
=titatis z facile applicabitur, si muten=
=tur signa terminorum, in q^bs contine=
=tur r; tum quippe radius convexitatis LBIK fit negativus, contrariâq ratione sumendus est; Ergo erit

$$\ldots\ldots\ z = \frac{-2ard}{ad-rd+2ar} = \frac{2ard}{rd-ad-2ar}.$$

Sed si e contrario superficies vitri ad objectum conversa sit convexa, oppo=
=sita autem concava, jam non r, sed a ne=
=gative accipiendus erit.

Denique si vitrum sit utrinque concavum, mutanda erunt signa terminorum in q^bs factores erunt separatim vel a vel r, servanda autem eorum signa, in q^bs a & r simul factores fuerint, propterea quod $-a \times -r = ar$. Erit igitur eâ in hypothesi

$$\ldots\ldots\ z = \frac{2ard}{-ad-rd-2ar};\ \ldots\ldots$$

qui quidem valor semper sit negativus oportet, sic ut quâ ex parte incidunt radii, in eâdem punctum concursûs F po=
=situm sit.

Quod si fingatur vitrum è regione objecti planum esse, et adverso autem convexum, tunc erit $r = \infty$; itaq in æqua=tione Z delendus erit terminus à d, in quo deest r. Ideoq si contra convexa sit pars vitri ad objectum versa, et plana altera, fiet $a = \infty$, proinde erit delendus r. d. Porrò facile intelligitur quid facto opus esset, si vitrum ex unâ parte planum, ex alterâ concavum foret. — — — — —

Si demum fingantur radii in vitrum convergentes ex A incidere, distantia d negative erit sumenda; eruntque A & F ex eâdem parte. Itaq mutanda erunt signa terminorum, in qbs factor fuerit d. Notandum est hypothesim, in qâ radii ex A in vitrum convexum incidunt convergentes, similem esse illi, in qâ radii ex eâdem distantiâ in vitrum concavum divergentes inciderent: in hâc autem, ut vidimus suprà,

focus F versus punctum A situs est.

Scholium 2dum.

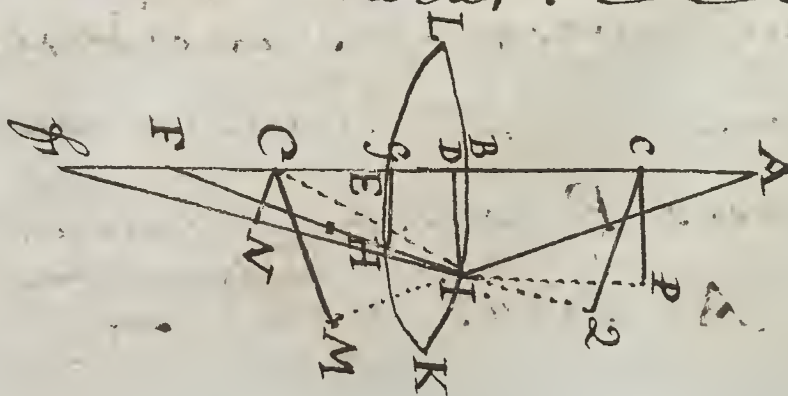
In problemate superiori solvendo certa quadam ratio angulorum incidentiæ & refractionis assumpta est, nimirum 3 : 2 vel 2 : 3, quod locum habet quoties ex aere in vitrum radius transit, vel ex vitro in äerem. Sed si latius patentem quis formulam optaret aptam quibuscumque mediis a radio permeandis, supponenda foret ratio generalis m : n tunc in valore z loco $\frac{2s}{3}$ poneretur $\frac{n}{m}s = CN$; loco autem $\frac{3t}{2}$ poneretur $\frac{m}{n}t = cQ$; calculoque peracto & supposito $m - n = p$, prodiret

$$\ldots\ldots z = \frac{mnar^2d - npaed + n^2are}{mpad + mprd - p^2ed + npre - mnar},$$

omissâ autem crassitudine medii e,

$$\ldots\ldots z = \frac{nard}{pad + prd - nar} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

in quâ quidem formulâ omnis fere scientia Dioptricæ continetur. ——



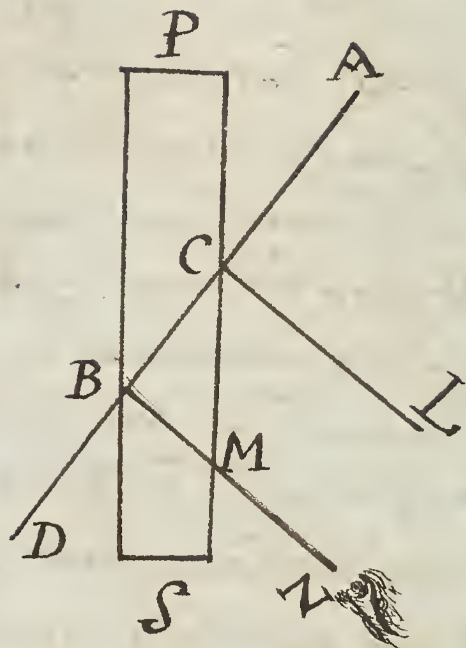
Catoptricæ elementa.

Totius Catoptricæ fundamentum est illud principium certissimis comprobatum experimentis, radium scilicet luminis in superficiem planam immissum ita reflecti, ut angulus reflexionis sit prorsus angulo incidentiæ æqualis. Verùm existimant Physici radium hunc non per ipsam corporum superficiem reflecti, bene vero per aliam cau=
=sam, idque antequàm superficiem tetigerit. Hæc vero causa à New=
=tono nequaquam est definita. Censet Mallebranchius ex omni=
=bus radiis in alicujus corporis superficiem appulsis, alios quidem

reflecti, reliquos verò extingui & inte=
=rire; reflecti, inquam, eos, qui inci=
=derent in particulas materiæ lucidæ,
quibus corporum meatus opplentur:
extingui autem quotquot in partes
corporis solidas incurrerent. Quam-
-vis enim partium istarum solidarum
occursus motum omnem globulorum,
ex quibus constat radius luminis, o
penitus destruat, eorumdem tamen
vibrationes & numeros interrumpit;
his autem fractis, continuò ipsa il=
=luminandi vis frangitur. Quod autem
ii qui in particulas lucidas sui
& consimiles ceciderint, reflectuntur
sub angulo incidentiæ æquali, id
prædictus auctor contingere affirmat
ob eandem causam, quæ in cæteris
corporibus elasticis re=
=flexionis angulum angulo
incidentiæ æqualem
facit.
Die 17º Junii: A. 1766.

Cur autem radius incidens in corpus, non ipsâ corporis superficie reflexus dicatur, facile ratio reddi potest. 1.° enim certum est nullam superficiem perfectè planam & politam esse. Ergo quilibet radiorum fasciculus in partem solidam corporis injectus, ~~in~~ plurima plana exigua variè erga se invicem inclinata offenderet, iisq ° tam reflecteretur, qàm dispergeretur; pro uno igitur incidentiæ angulo multiplex surgeret incertusq reflexionis angulus. Atqui tn fasciculus luminis in cujuslibet corporis superficiem jactus, nunquam reflectitur nisi ad angulum angulo incidentiæ prorsùs æqualem. Ergo non ipsius corporis partes solidæ ° eum reflectunt. 2.° si radius tenuissimus per foramen in chartâ acu punctum transeat, excipiaturq plano vitreo, constat experientiâ duos ad punctum incidentiæ circulos lucidos videri, quorum alter clarior, alter obscurior, quorumq prior superiori superficie plani vitrei, alter verò inferiori reflectitur. Videtur porro uterq juxta lineas parallelas, hoc est, sub eodem angulo. Quod ut melius intelligatur, oculis subjicienda figura est.

Delapsus itaq radius ex A in C, in ingressu plani vitrei partim reflectitur in L, partim subiens vitrumq refrangitur in B. Nunc vero in egressu partim ex B refrangitur in D, partim ex retrocedens reflectitur in M, unde in N refrangitur. Conspiciuntur itaque duo circuli lucidi, alter per radium visualem L C, alter per parallelum L M.



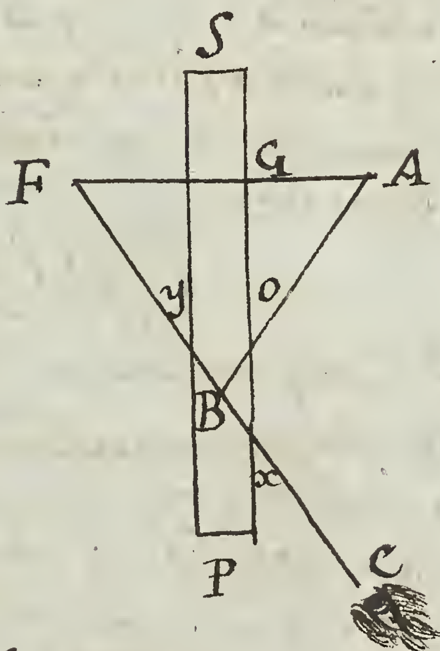
Jam vero evidens est moliculam lucidam B per inferiorem plani vitrei superficiem ~~unum~~ non reflecti; Ergo alia quoddam hujus reflexionis causa quaerenda est.

Principium illud aequalitatis angulorum incidentiae et reflexionis, quod totius Catoptricae fundamentum esse diximus, jam ad explicanda quoddam phaenomena adhibendum est.

Phænomenon 1^m.

Objectum cujus imago in speculo pla=
=no repræsentatur, pone speculum vi=
=detur, ad eandem distantiam, in quâ
reipsâ versatur a speculo.

Explic.^r Sit speculum SP: sit ob=
=jectum in A, ex quo
proficiscatur radius
AB reflectendus, in
punctum C. In hoc
constitutus oculus
imaginem conspiciet,
referetq ad punctum
F: jam ex F in A duca=
=tur linea FA.



Æquales sunt anguli o & x; sed x = y;
Ergo o = y. Proinde BF = BA. Supponitur
quippe FA ppendicularis in planum speculi
SP. Similiter FG = GA propter naturam tri=
=anguli isocelis ABF.

Corollarium 1^m.

Objectum a speculo repræsentatum videtur
semper in puncto intersectionis duarum line=
=arum, quarum altera ex ipso objecto in pla=
=num speculi, altera ex oculo in punctum inci=
=dentiæ radii ex objecto profecti duceretur.

Hoc est si sit objectum in puncto A, sitq B punctum incidentiæ, oculus autem in C, erit punctum F, in quo est imago objecti, intersectio perpendicularis A F & obliquæ C B F.

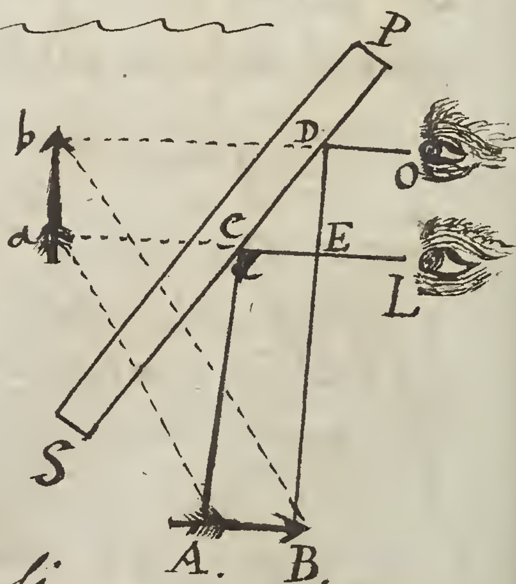
Cum enim sit $o = x = y$, & aliunde B G sit perpendicularis in F A, oportet triangulum A B F esse isocele; Ergo oportet C B F ita concurrere cum A F, ut G F sit = G A, paritérq F B = B A. Intersectio igitur perpendicularis & obliquæ in ipsâ imagine fiat necesse est.

Corollarium istud locum habet seu speculum sit planum, seu convexum seu concavum.

Corollarium 2.dum

Si objectum A B jacens in plano horizontali repræsentetur in speculo plano, quod cum horizonte angulum faciat = 45° illius imago recta videbitur.

Sit enim speculum S P objecto A B imminens; radius ex A profectus, incidensq in punctum C, ita reflectitur, ut angulus reflexionis P C L sit æqualis angulo incidentiæ S C A: pariter radius ex B incidens in D ita reflectitur, ut sit P D O = S D B. Sed ob prædictam inclinationem speculi, anguli incidentiæ sunt 45°; Ergo anguli reflexionis P D O, P C L erunt quoque 45°, proinde oculus constitutus in O & L objectum A B referret ad a b, videbitq illud in situ erecto.



Scholium.

Præter specula plana alia sunt sphærica, alia cylindrica, alia conica, &c, eaq sunt vel convexa vel concava. De his pauca quædam dicenda sunt.

Phænomenon 2dum.

Magnitudo objectorum in speculis planis nec minuitur, nec augetur, in sphæricis autem convexis minuitur.

Explicr. 1a. pars: Triangulum DCE est isoscele; Ergo DE = CE = AB. Sed pariter DE = ab; Ergo AB = ab.

Explicatr. 2da Pars: Ut intelligatur qare objecta minuat speculum sphæricum convexum SBP, ostendendum principio est punctum A, ex quo profectus radius incidat in B, & reflectatur in O, videndum fore inter centrum C & superficiem HB speculi convexi. Res autem sic conficitur: anguli incidentiæ & reflexionis, nempe ABI & KBO sunt æquales, atq acuti. Est autem KBO = EBI, hic igitur est acutus, ac consequenter minor angulo recto CBI. Ergo punctum E, ad qod radius visualis OB dirigitur, est inter centrum & superficiem sphæræ. Jam vero hinc totum objectum AH, qantumcumq fuerit, repræsentandum esse inter E & H. E cæteris enim

objecti punctis emissi radii & G: et D angulos incidentiæ & reflexionis faciunt acutiores quàm ex L. —

Punctum igitur D per radium visualem LB referetur ad G, quod est à centro C remotius quàm E, & sic de cæteris. Ergo objecta in speculo convexo sphærico repræsentata videri oportet minora. —

Eoque magis minuetur magnitudo objectorum, quo major fuerit speculi convexitas, hoc est, quò minoris sphæ=ræ segmentum fuerit speculum.

Nottandum est etiam in his speculis imagines objectorum in situ inverso videri. —

Phænomenon 3.^m

In speculo cylindrico & convexo ob=jecta videntur multum elongata,

sed latudine perangustâ, si speculum sit erectum: curta autem, sed latissima, si in horizonte jaceat speculum.

Explicatur. Ratio hujus phænomeni est, quod speculum cylindricum est mixtum, id est, compositum ex plano & sphærico; planum quidem juxta longitudinem, sphæricum verò convexum juxta latitudinem. Nam ex basi superiori cylindri ad inferiorem pertinentes lineæ sunt rectæ; ex latere autem ductæ sunt circulares.

Jam verò speculum planum objecta nec minuit, nec adauget: eadem autem sphæricum convexum imminuit. Ergò objecta in speculo cylindrico erecto debent videri partim oblonga, partim attenuata, utque gracilia.

Quod si non erectum stet speculum, sed jaceat objecta in eo depicta, ob contrariam rationem apparere debent in latum extensa, sed brevia.

Phænomenon 4m.

Objectorum imagines in speculo conico videntur oblongæ, sed infernè latiores, supernè autem angustiores. — In speculo eodem jacenti, brevissimæ apparent, & in uno latere quàm in altero contractiores.

Explic.r Viz. cùm speculum est erectum, lineæ ex apice in basim juxta convexam superficiem ductæ, totidem specula plana efficiunt; Ergo non minuuntur longitudines objectorum; sed qoniam lineæ conum ex latere cingentes circulares sunt, minui oportet objectorum latitudinem; rursus cùm circumferentiæ à base ad apicem usq decrescant, majoremq convexitatem acqirant, magis minuuntur partes objectorum superiores qàm inferiores; proindè imagines latæ infra, supra autem angustæ videri debent. —

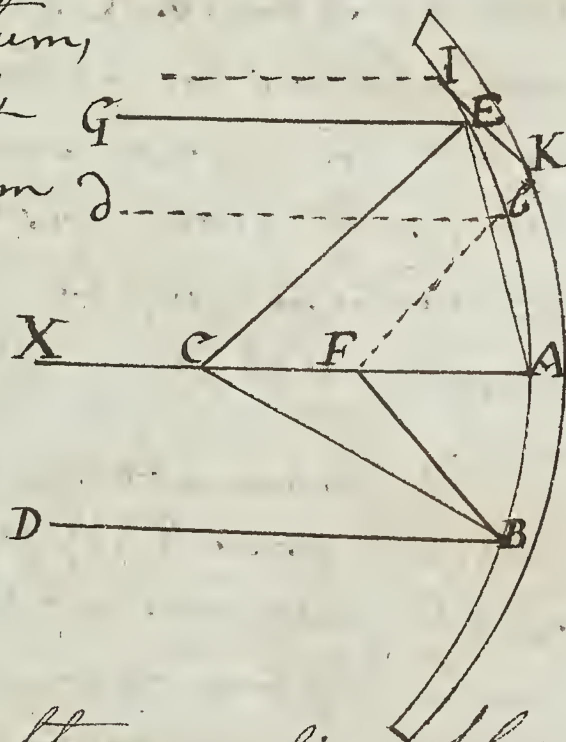
Similiter mutato speculi situ, facile concipitur quarè & quomodò mutanda sit imaginum forma.

Problema 1.^m

Invenire in quod punctum axis AX re=
=flectendus sit radius DB incidens in spe=
=culum concavum BAE, juxta viam axi
parallelam, quod ab axe non distet arcu 60°?

Solvitur. Sit F punctum,
quo reflectitur radius ex
puncto incidentiæ B. Jam
istius puncti F determi=
=nandus est situs in
datâ hypothesi. Sit C
centrum concavitatis
speculi; ducto radio BC,
æquales erunt anguli
CBD, CBF, quippe cum
alter anguli incidentiæ, alter anguli reflex=
=ionis sit complementum. Ergo erit etiam
CBF = FCB; unde FC = FB. Sit jam
BC = CA = r. Quoniam est FC + FB, seu 2FC
> BC, erit consequenter FC > $\frac{1}{2}$ r, ideoque
AF < $\frac{1}{2}$ r: Ergo oportet punctum quæsitum
F à speculo concavo distare minus quàm
$\frac{1}{4}$ diametri ipsius concavitatis.

Quod si arcus concavitatis inter
punctum incidentiæ & originem axis



speculi comprehensus, V: G: AE sit = 60°, erit quemadmodum anteà, angulus CEA = ECA = 60°. Ergo linea reflexionis EA erit = r = AC; igitur punctum F erit in A.

Deniq; si prodictus arcus superet 60°, linea reflexionis dirigetur extra speculum, V: G: ex I in K. Radius itaq; priusquàm reflectatur in axem, duas vel plures reflex=iones in ipsâ speculi concavitate patie=tur, neq; post primam, perget incidere in speculum juxta directionem axi paralle=lam; quod à propositâ hypothesi alienum est. Quamobrem etsi varius est situs puncti positi F, prout radius in speculum cadit propius vel longius ab axe, tn id pro certo habendum est, distantiam ejusdem puncti à speculo, quartâ diametri parte majorem esse non posse.

Corollarium.

Oes radii circum axem incidentes in puncta ab axe æque distantia, in idem punctum F reflectantur necesse est; unde istud punctum speculi Focus appellatur. Illic enim radii luminis reflexi ita conden=sari possunt, ut urendi vim concipiant max=imam & durissima liquefaciendi corpora.

Atq hinc specula concava nonnunquam vocantur Ustoria vel Caustica. His ad=hibitis ~~[illegible]~~ Archimedes Marcelli Sy=racusas obsidentis classem & naves in=cendisse fertur.

Notandum est majorem esse vim & efficaciam speculi quod sit majoris sphæ=ræ segmentum, quia & circulis constat majoribus, ideoq plures radii in eandem circumferentiam incidunt ad eundem focum reflectendi.

Majora item specula ad majorem urunt distantiam; in his quippe quarta pars diametri major est, quam eadem diametri pars in speculis minoribus.

Scholium 1um.

In locum unius speculi concavi assumi possunt plura specula plana, quæ erga se invicem sint apte & opportune inclinata, sic ut acceptos radios in idem punctum com=muni velut conspiratione consilioq reflec=tant.

Scholium 2dum.

Lumen seu Ignis si in ipso speculi con=cavi foco reponatur, radii lucidi vel igniti ex communi foco F in speculi concavitatem missi, reflectentur juxta lineas BD, bd, &c, cum axe & inter se parallelas, ut patet; proinde

si speculo BAE alterum ex adverso oppo=
=natur, radii per hoc excepti atq reflexi
in focum communem iterum concurrent, ibiq
posita urent corpora.

Phænomenon 5.^m

Objectum in foco speculi concavi col=
=locatum videri nequit in eodem speculo.

Explic.^r Objectum qodlibet semper vide=
=tur in eo puncto, ubi concurrit radius
reflexus ac visualis, cum ppendiculari
ductâ ex objecto ad superficiem speculi
ut non multo ante expositum fuit. Si ~~igitur~~ autem
objectum versatur in F ppendicularis ad
speculum ducta est FA, radiiqꝫ reflexi
& visuales sunt BD, bd, &c; Atqꝫ isti radii,
utpote paralleli cum axe, nusquam cum
FA possunt concurrere; Ergo objectum in
speculo videri ex nullo loco potest.

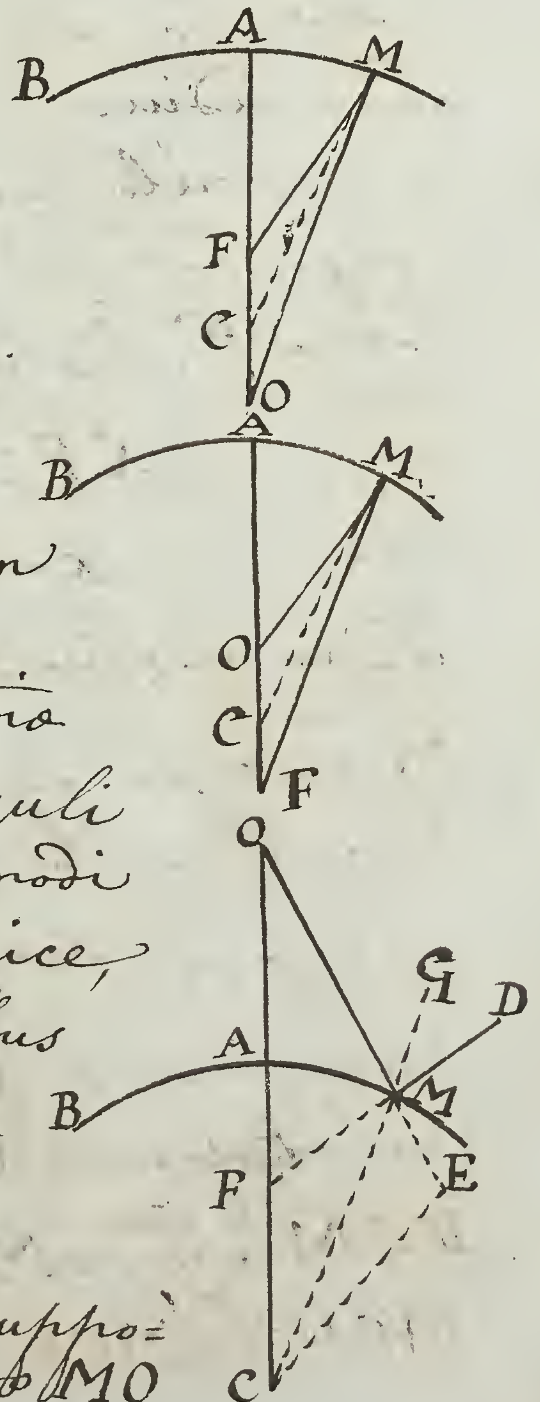
Problema 2.^dum

Datâ speculi BAE concavitate, & arcu
AB comprehenso inter axis originem A &
punctum incidentiæ B, invenire valorem
quantitatis AF?

Solvit.^r Hâc unâ ttm proportione opus
erit; Sinus BAF = 1 : r :: Sin. FBA : AF = &c.

Problema 3um.

Invenire valorem analyticum AF, qdo radius non parallelè ad axem, sed ex qodam axis puncto O in speculum cadit seu con=cavum seu convexum, exiguusq admodum est arcus AM inter punctum incidentiæ M & axis originem interceptus?



Solvitr. Ducatur ex puncto incidentiæ radius concavitatis MC. Hic radius angulum OMF, quem facit radius incidens cum eodem reflexo bifariam dividit. Demonstratur autem in Elementis Geometriæ divisiones in basi trianguli factas per secantem ejusmodi demissam ex trianguli apice, proportionatas esse duobus lateribus. Ergo —

$$CO : CF :: OM : MF,$$

sed quoniam arcus AM suppo=nitur infinite parvus, pro MO

 sumere licet AO, similiterq pro MF sumi potest AF; sit igitur AF = x, AO = d; sit MC = AC = r; hinc erit CO = d − r, & CF = r − x; jamque prædicta proportio fiet ..... $d-r : r-x :: d : x$; ———

unde ..... $x = \frac{rd}{2d-r}$ ———

Inventa est hoc formula in hypothesi quod radius proficisceretur ex puncto O a speculo remotiori quàm F. Si autem origo radii O proprior esset speculo qàm focus F, haberetur proportio ———

.............$CF : CO :: FM : MO$; ....

seu ..... $x-r : r-d :: x : d$; ....

unde rursùs $x = \frac{dr}{2d-r}$. ———

Nunc si agatur de speculo convexo, signa erunt mutanda, sicque fiet ———

.... $x = \frac{-rd}{-2d+r} = \frac{rd}{2d+r}$. ———

Enimverò ex C concavitatis centro du=catur linea CE (fig. 3.) ita ut angulus ECM sit = MCF, æqualia erunt triangula MCF & MCE; nam ob æqualitatem angu=

=lorum incidentiæ & reflexionis, OMG = GMD; Ergo æquantur quoque anguli his oppositi, FMC & EMC; protereà latus MC commune est utrique triangulo: Ergo &c. Proindè ME=MF=AF=x.

Jam verò secans CM proportionem suppeditat OM : ME :: OC : CE = FC, ...

seu .... $\partial : x :: \partial + r : r - x$; ....

unde .... $x = \frac{r\partial}{2\partial + r}$

In omni igitur hypothesi seu spe=culum erit concavum seu convexum, habebitur $x = \frac{r\partial}{2\partial \mp r}$.

Scholium.

Quando arcus AM non erit exiguus tunc MF erit > AE; Atqui est semper MF = $\frac{MO \times CF}{CO}$; Ergo AF=x minor erit eâ fractione: à fortiori igitur $x = < \frac{r\partial}{2\partial \mp r}$ siquidem cùm arcus AM est finitus, tunc est $\partial >$ MO.

356. Quapropter cùm radius incidit in punctum ab axe remotius, focus F vice versâ ad speculi superficiem magis accedit. Unde formula praedicta $\frac{rd}{2d\mp r}$ exprimit maximam in quâ oculus à speculo esse possit, distantiam.

Corollarium 1um

Ex his tribus x, d, r, si dentur duo, tertium in problematis hypothesi invenietur facillimè. Itaq. erit .... $d = \frac{\pm rx}{2x-r}$; ....

.... $r = \frac{2xd}{d \pm x}$.

Corollarium 2um

In speculo convexo imago objecti est versùs centrum convexitatis sita, quicumq. sit valor d. Nam quidquid valeat d, quantitas $\frac{rd}{2d+r} = x$ negativa nunquàm fieri potest.

In speculo autem concavo, si supponatur $\pm d = \frac{1}{\infty}$, fiet $x = \frac{1}{-\infty}$. Porrò negativus hic valor x indicat objecti imaginem versari in parte oppositâ directioni semidiametri, quae nimirùm appellata fuit $+r$; imago.

igitur pone speculum concavum se tenet.

Corollarium 3.m

Si fiat $r=\infty$, speculum nec convexum est, nec concavum, sed planum. Porrò in eâdem hypothesi fit $x=-d$. Undè concludendum est imagines, quæ in planis speculis repræsentantur, semper constitui ultra speculum & æquè distare à superficie speculi, ac ipsum objectum citra idem speculum constitutum.

Scholium.

Cætera quæ ex superiori formulâ deduci queunt corollaria erga quodlibet speculi genus, quoad ad situs imaginum motusve respiciunt, breviter eleganterq. exposita videri possunt in opere, cui titulus Leçons elementaires d'optique auctore La Caille.

Problema 4.m

Invenire focum F seu distantiam $AF=x$, iisdem conditionibus ac in problemate tertio servatis; excepto quod arcus AM sit finitus & quantuscumque?

Ad hanc quæstionem solvendam sufficit Trigonometria rectilinea. Nam 1° si focus sit speculo proprior quam centrum concavitatis speculi, in triangulo MCO cognoscitur angulus OCM; est enim supplementum anguli ACM, cujus mensura est arcus datus AM; cognoscitur etiam CM & CO. Resolvi igitur potest triangulum MCO: sic innotescet angulus CMO = CMF. Jam itaq in triangulo MCF tres anguli noscuntur & unum latus. Ergo resolvi potest, atq ita cognosci FC. Porro AF = AC − FC = x. ———

2do si objectum sit propius speculo qam focus, in triangulo MOC cognoscuntur duo latera OC, CM, & angulus eorum ACM. Ergo statim resoluto triangulo, detegetur angulus OMC = CMF. Unde jam in triangulo MCF cogniti habentur duo anguli, & latus comprehensum MC, proinde mox habebitur CF; est autem AF = AC + CF. Ergo &c ———

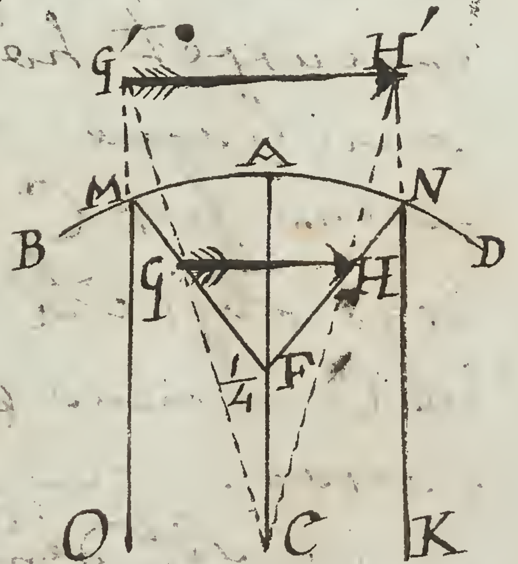
3° demum si agitur de speculo convexo, cognita pariter sunt in triangulo OMC, latera OC & CM, angulusq interceptus OCM. Ergo detegetur facillime angulus COM, & consequenter CME = FMC. Est quippe angulus exterior MCE = MOC + MCO. ———

Jam resolvi potest triangulum FMC, sicq obtinevi valor lateris FC, ex quo sta=tim deducetur AF = AC − FC.

Phænomenon 6^m.

In speculo concavo augetur magnitudo objectorum, quamdiu hæc sunt inter speculum & $\frac{1}{4}$ axis posita; minus autem ab hoc puncto ad centrum posita amplificantur; deinceps vero imminuta videri incipiunt.

Explic.^r In speculo BAD sit objectum GH inter A & $\frac{1}{4}$ r, sitq speculi focus in F. Radius ex G incidens in M reflectetur juxta lineam MO axi pa=rallelam; itemq radius ex H incidens in N reflec=tetur juxta lineam NK.



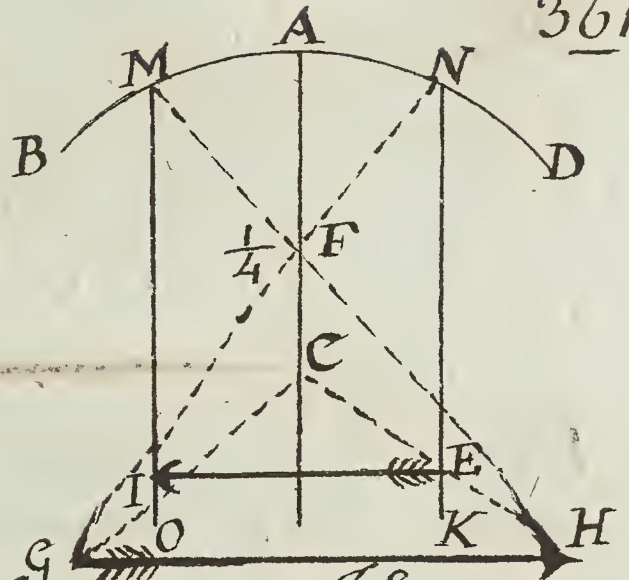
Jam si ex C ducatur linea in superficiem speculi perpendicularis, hoc est, diameter transiens per H, concurrens cum NK in puncto H'; pariterque similis ducatur linea ex C, transiens per G, concurrensq cum MO in puncto G',

objectum GH amplificatum, rectumq apparebit in G'H'.

Quod si objectum GH sit positum inter $\frac{1}{4}$ & C, radius ex G emissus in N reflectetur juxta parallelam axi NK; radius verò ex H emissus in M, reflec=tetur juxta MO.

Jam si ex G ducatur linea per centrum transiens, & speculo perpendicularis, concurret hoc cum NK in puncto K. similisque linea ducta ex H & tran=siens per C, concurret in O cum MO; Ergo objecti GH exhibebitur ex K in O minus amplificata & situ in=verso.

Si sit denique GH infra centrum spe=culi constitutum, Radius ex G emis=sus in N reflectetur in K; Si=militer radius ex H immissus in M reflectetur in O. Porro diameter



transiens per punctum G, radium reflexum MO offendet in I: diametri ~~[illegible]~~que transiens per H radium re=flexum NK offendet in E. Ergo imago objecti GH exhibebitur in IE, et quidem imminuta.

De Coloribus.

(1) Colores primarios septem Newtonus, aliiq post ipsum fere oes Physici agnoverunt, propterea quod luminis tractus prismate exceptus in totidem radios decomponeretur propriis colo=ribus distinctos, Anglicè Red, Orange Yellow, Green, Blue, Indico, Violett; horum autem nullus novo prismate iterum exceptus decomponi ulterius posset. Verum hoc celebris experien=tia septem oio primarios esse colo=res plane efficere non videtur; ex eo enim qod decompositi hactenus non fuere ulli ex radiis modo nume=ratis, minime sequitur revera nul=los posse decomponi, aut non fore aliqos exquisitioribus instrumentis decomponendos. Melius argumentari videntur ii, qui tres tm primi-genios esse concludunt, nempe

Rubrum, Flavum, Caeruleumq, et eo-
qod caeterorum nulli non et istorum
permixtione nascantur.

(2.) Statuit Newtonus septem radios,
cum suis coloribus directe amissos a Sole,
non esse eodem modo refractionis patientes,
sed Rubrum minus refrangi qam caeteros,
deinde Aureum, &c, ac postremo Violaceum
caeteris oibus magis faciliusq refrangi.
Quod qdm sic probat: Radii prisma traji=
=cientes oblongam Solis imaginem probent,
alii vero superiorem partem imaginis, alii
inferiorem occupant, ita qdm ut locum
infimum radius ruber, supremum violaceus
occupet. Atqui aliter eveniret, si oes radii
similibus essent refractionibus obnoxii,
oes quippe, etiam prismate trajecto, ma=
=nerent permixti atq confusi; praeterea
idem experimentum probat Rubrum
caeteris oibus minorem refractionem
pati, Violaceum vero majorem; cum hic
plus caeteris, ille minus, post trajectum
prisma, a viâ suâ deflectat.

(3.) Cur non eodem modo refringantur
radii, causam repetit Newtonus et

diversâ eorum mole." Vel enim, inquit, ex diversâ radiorum mole oriuntur diversi refractionis gradus, vel ex di=versâ atomorum lucidarum figurâ vel ex diversâ earumdem celeritate. Atqui neutrum posterius admitti potest.

Non est qdm diversa atomorum figu=ra. Constat enim eas oblique inciden=tes in planum semper reflecti juxta angulum æqualem angulo incidentiæ: Atqui non æquarentur isti anguli, nisi atomorum lucidarum figuræ plano essent consimiles; Ergo &c.

Neq est etiam diversa atomorum lucidarum celeritas. Si enim radii ru=bri, v: g: majori celeritate pollerent, ubi Luna, desinente eclypsi, emerge=ret ex umbrâ, aspergi videretur ex ordine septem coloribus, primum in=quam, rubreo, utpote velociori, tum aureo, deinde flavo, &c; sed hoc experi=entiæ adversum est; in sideribus enim eclypsum passis unus dumtaxat color albens aspicitur. Ergo &c.

Proterea ex eo diversorum refractionis

graduum causa desumi potest, quo po=sito, illa varietas refractionum op=time explicatur: Atqui &c. Quo enim major est moles, eò etiam, cæteris pa=ribus, major est motus, eò majorem proinde particulæ lucidæ resisten=tiam vi refringenti afferunt, minusq coguntur à viâ suâ deflectere." ——

Hinc explicatur, quare radius ru=beus minorem qam cæteri refractionem patiatur. Hic enim majori est mole; quippè experientia docet oculos rubri coloris aspectu vividius percelli; ru=bri igitur major est vis, cùm tn non sit major ejusdem velocitas, qod molem necessariò arguit majorem. ——

Dices. Radii non refringuntur, ni=si per Attractionem medii, qod subeunt: Atqi magis attrahi oportet moles ma=jores; Ergo radii mole majores plus deberent refringi. —— ——

Dist: Min: Moles majores in majo=ribus distantiis plus attrahuntur, conc: in contactu vel propè contactum, Nego Min. ——

366. In minoribus enim distantiis attractio sequitur rationem superficiei contactus. —

(4.) Colores varii qbs corpora distinguuntur, depromit Newtonus ex variâ partium dispositione aptâ ad alios qdm radios reflectendos, ad absorbendos vero alios. Idq ex eo probat, qod corpus qodcumq induere soleat eum colorem, ~~cujus~~ cujus radios satis abundè reflec=tit; experientiâ siqdm teste radii rubri in corpus flavum vel viride appulsi, re=flexiq, illud rubicundo colore tingunt.

Hinc albedinis causam facilè deducit. Plura enim sunt corpora apta ad reflec=tendos oes pariter radios haud separatos, & quales profecti primum ex Sole sunt; alia autem corpora apparent alba. —

Hinc etiam explicat, cur vividiores sint quorumdam corporum colores; qod viz. corpus majorem copiam atomorum certo colore distinctarum reflectit, coloris ejusdem vividiorem sensum ex=citare datum sit. ———

Hinc demum explicat nigredinis causam. Corpus enim illud ~~est~~ nigrum videndum est, qod maximam absorbet

partem radiorum, quos excipit; tunc quippe paucissimi, qui reflectuntur, impares sunt distinctæ visionis sen=
=sui excitando; unde patet nigredi=
=nem potius esse defectum coloris, quam colorem proprie dictum. Hac etiam explicatione intelligitur quam ob causam corpora nigra facile con=
=cipiant ignem; siquidem inest in illis maximus atomorum ignearum nume=
=rus.

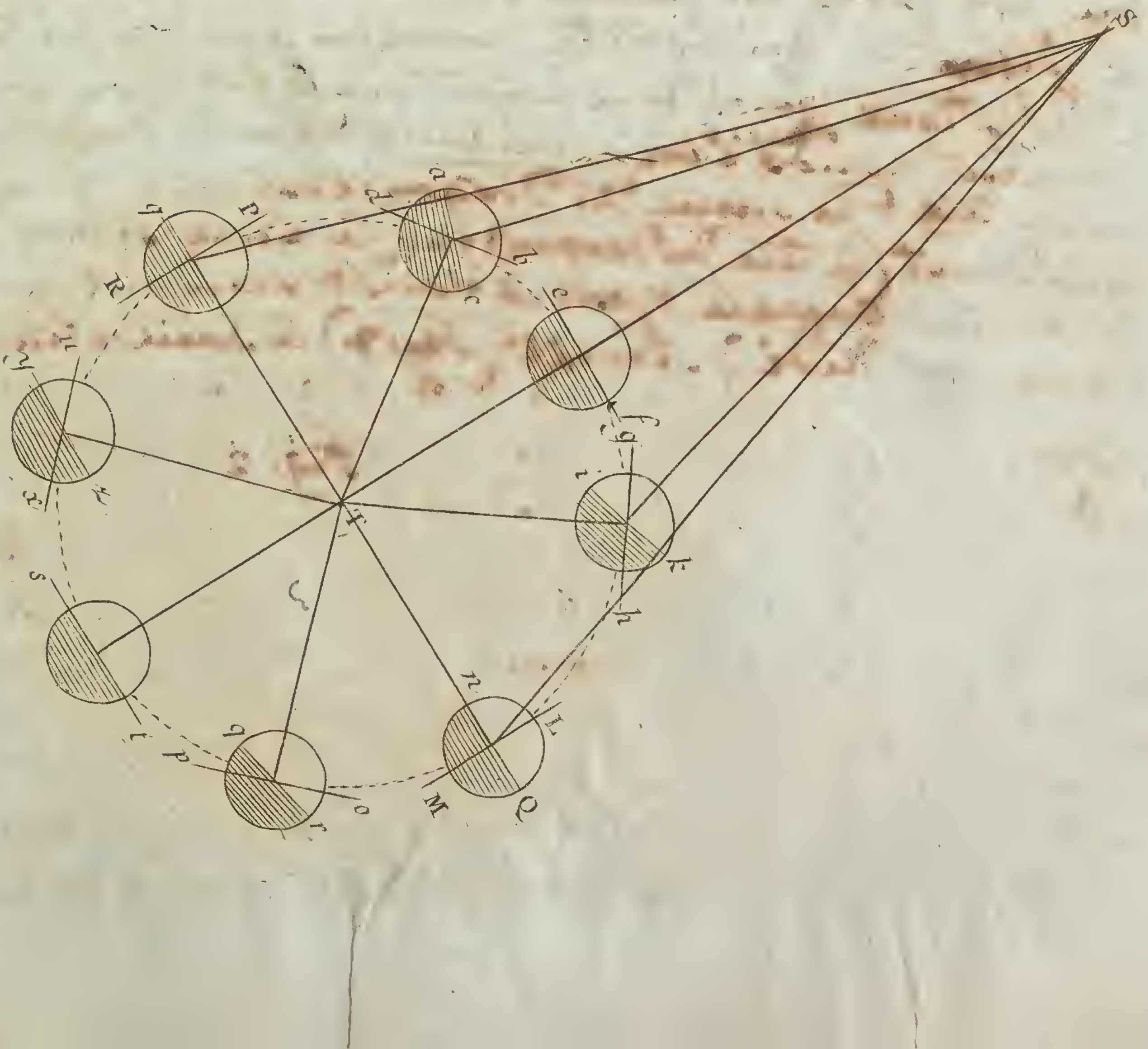
(5.) Colorum varietas ab iis, qui Malle=
=branchii vel Nolleti partes amplec=
=tuntur, aliter omnino explicatur. Hi quippe non putant cum Newtono radios emitti a Sole propriis imbutos colori=
=bus, qui tum appareant, cum occursu corporum dividantur, divisique in nostros rejiciantur oculos; sed quemadmodum va=
=riis vibrationibus partium corporis sonori, seu tardioribus seu celeriori=
=bus, particulisque aeris subinde aut velocius aut segnius agitatis, soni vel 2 graviores vel 1 acutiores generantur: ita colores volunt diversi generis pro=

=creari, prout a corpore lucido cele=
=riori, frequentioriq; impulsu, vel len=
=tiori & minus iterato partes luminis
jaciuntur; hinc V: G: rubra videri cor=
=pora, quæ sæpius iteratis vibrationi=
=bus proximas partes fluidi lucidi
percutiunt atq; emittunt; contra autem
violacea, quorum languidiori motu
agitatæ partes lumen vicinum debi=
=lioribus ictibus pellunt. ~~~

Cur autem Newtoni sententiam
huic postponamus, ea ratio nos inter
cæteras movet, quod fasciculus lucidus
in corporis cujuslibet superficiem in=
=cidens, si vera est Newtoni sententia,
ipsâ reflexione decomponendus esse
videatur, tum ob id quod juxta illum
natura singulorum radiorum eos reddit
variè reflexibiles, tum quia cum aspera
sit quovis superficies, non omnium ra=
=diorum, ex quibus constat fasciculus,
idem possit esse angulus incidentiæ,
nec idem proinde angulus reflexionis.

Quod si Newtonianus aliquis
dicat reflecti radios, antequam

ipsam corporis superficiem teti=
=gerent; jam nulla videtur posse as=
=signari causa, cur aliæ superfi=
=cies alios reflectant radios, nec
cur majori, minorive copiâ.
Quapropter Newtoni partes saepe
alias ultrò amplexi, in explicandâ
tn luminis naturâ, & colorum ori=
=gine, ægrè licet, vitq aliis melius
confisi, deserimus. ——————



37°. # Eclipses de Lune.

La Lune ne peut être éclipsée qu'elle ne soit pleine, c.à.d. en opposition avec le Soleil, parceque alors la Terre qui est intermédiaire intercepte les rayons du Soleil, et jette son ombre vers la Lune; mais comme le plan de l'orbite lunaire est incliné sur le plan de l'orbite terrestre, l'ombre de la Terre peut passer à coté de la Lune, si cette planète est dans une partie de son orbite plus haute ou plus basse que le plan de l'Ecliptique; d'où il suit qu'il ne doit pas y avoir éclipse dans toutes les pleines Lunes; elle n'arrive que quand la Lune est au point ou fort près du point d'intersection, qui rend le plan de son orbite commun avec celui de l'Ecliptique. (Les deux points d'intersection se nomment noeuds, l'un ascendant & l'autre descendant, ou la tête & la queue du Dragon: c'est par le noeud ascendant (la tête du dragon) que la Lune s'élève dans la partie boréale, & par le noeud descendant, qu'elle passe au Midi.) Ainsi (Fig. 1.) le Soleil étant

Fig. 1.

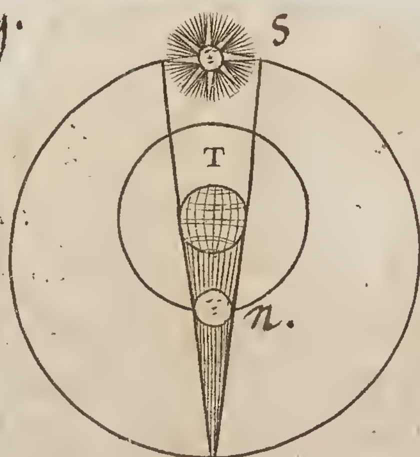
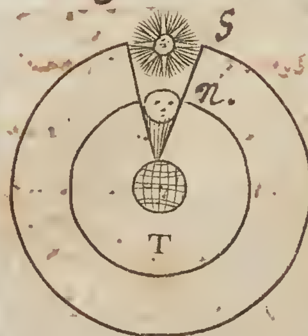


Fig. 2.



au point S, la Terre dans l'Ecliptique au point T, la Lune au nœud N, il y aura Eclipse.

La durée d'une Eclipse est le temps qui s'ecoule entre l'immersion et l'émersion. L'immersion est le moment où le Disque de la Lune commence à entrer dans l'ombre; l'emersion est l'instant où il commence à reparoitre. L'Eclipse est centrale ou non centrale; la première arrive quand le Soleil, la Terre et la Lune ont leur centre dans la même ligne droite, et elle est toujours totale. Voyez la Fig. I. La seconde est quelquefois totale et souvent partielle: c'est pour determiner exactement la grandeur des Eclipses partielles, que les Astronomes ont divisé le Disque de la Lune en 12 doigts ou 12 parties égales: l'Eclipse est de 6 doigts lorsque la moitié du Disque est plongée dans l'ombre. Si l'Eclipse totale dure quelque temps, on dit qu'elle est totale cum morâ; et si elle n'est qu'instantanée, on l'appelle totale sine morâ. Les plus longues Eclipses sont les centrales, quand la Lune est Apogée, parce qu'elle se meut alors plus lentement; cependant elles ne vont jamais jusqu'à 5 heures.

La Lune, quoique totalement eclipsée, paroit tantot rougeatre, tantot de couleur cendrée, &c, parce qu'il se mele toujours quelques rayons de lumiere dans l'ombre à cause de la refraction; elle paroit même sensiblement plus pale & plus obscure avant que d'entrer dans l'ombre, ce qui vient d'un mélange marqué d'ombre & de lumiere, que l'on appelle pénombre: si quelque fois dans le temps de l'Eclipse on la voit sur l'horison avec le Soleil, ce n'est qu'une illusion optique occasionnée par la refraction des rayons dans

l'atmosphere; car la Lune est alors à 6 signes ou 180 degrés du Soleil.

Les Eclipses de Lune sont universelles, c. à d. qu'elles sont vues dans tous les pays où elle brille avant que d'etre éclipsée; mais elles commencent & finissent à differents temps pour les differents pays, selon qu'ils sont plus ou moins à l'orient; aussi ont-elles beaucoup servi à perfectionner la Geographie par l'exactitude des Longitudes.

Comme la Lune a son mouvement d'occident en orient, c'est toujours par son bord ou lymbe oriental que commence l'immersion.

Eclipses de Soleil.

Si la Lune, quand elle est nouvelle, se trouve entre le Soleil et la Terre, cette interposition diametrale nous privera de lumiere, et nous aurons Eclipse de Soleil; la situation des 3 astres sera comme dans la Fig. 2 où le Soleil etant au point S, et la Terre au point T de l'Ecliptique, la Lune se trouve dans son noud N, & jette sur la Terre un cône ombreux; le Soleil doit être eclipsé plus rarement que la Lune, d'abord parce que cette Planete ne se trouve pas toujours dans le noud ou près du noud de son orbite quand elle est en conjonction; en second lieu, parce qu'elle ne jette pas une ombre aussi longue que la Terre, etant 50 fois plus petite qu'elle.

Les Eclipses de Soleil sont divisées en partielles, totales, centrales & annulaires:

elles sont partielles quand la Lune ne nous cache qu'une partie plus ou moins grande du disque solaire; totales, si tout le disque est caché; centrales, si une même ligne joint les centres des 3 Astres; annulaires, lorsque l'on voit un anneau de lumiere couronner le disque de la Lune.

Les Eclipses totales de Soleil sont bien rares; mais elles peuvent arriver quand la Lune Périgée est en conjonction avec le Soleil Apogée, parcequ'alors le disque de la Lune est plus grand que celui du Soleil.

Les Eclipses centrales, qui arrivent lorsque le Soleil est Périgée et la Lune Apogée, sont annulaires, parceque le disque de la Lune est dans ce moment plus petit que celui du Soleil, ce qui fait deborder un peu la lumiere.

Les Eclipses de Soleil ne peuvent jamais être universelles, c. à-d. mettre tout l'hémisphere ~~des~~ la Terre dans les tenebres, parce que la Terre beaucoup plus volumineuse que la Lune, ne peut jamais entrer entierement dans l'ombre du cône; elles n'arrivent pas non plus en même temps dans tous les lieux où elles sont visibles; mais elles paroissent plutot aux parties occidentales qu'aux pays orientaux: le bord occidental du Soleil est toujours le premier caché, parceque le Soleil et la Lune allant d'Occident en Orient, la Lune ne peut passer devant le Soleil qu'elle n'atteigne prémierement son bord occidental.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Index.

Physica caput alterum. — Pag:

sui ponderis partem amittet, quantum Pag:
ponderat par volumen fluidi. ——

Concl: 5.a Corpus in superficie fluidi spe=
=cifice gravioris depositum, tamdiu
immergendum est, quamdiu pondus
fluidi ejusdem voluminis ac pars
corporis immersa non adæquabit
pondus ipsum totius corporis. — 177.

Concl: 6.a In tubis communicantibus
(excipiendi sunt tubi capillares)
æquilibrium est inter liquores homo=
=geneos, quando ad libellam componuntur;
& vice versâ iidem ad libellam com=
=ponuntur, quoties est æquilibrium. 179.

Concl: 7.a Liquores heterogeni in tubis
communicantibus inclusi æquili=
=brium assequuntur, quando altitu=
=dines obtinent suis densitatibus
reciprocas, & vice versâ. —— 180.

Concl: 8.a Ascensus & suspensio liqorum
intra tubos & anthlias oritur ex
pressione aeris superincumbentis. 182.

Varia explicantur phenomena - 183.

Probl: 1.m Invenire pondus Atmosphera. 187 &c.

Probl: 2.m Datâ recipientis capacitate
anthliaq apposito, definire quot 192.

Phænom: 3.^m Quamvis in fundo oculi externarum rerum imagines inversæ resideant, nihil tn ordine inverso videre solemus. Pag. 317.

Phænom. 4.^m Corpora eo minora videntur quo in majori sunt distantiâ ab oculo — 318.

Phænom: 5.^m Cœlum suspicienti objicitur species sphæræ concavæ, quæ tn versus Zenith paululum depressa, versus Horizon=tem latior ampliorque apparet — 320.

Phænom. 6.^m Quamvis in utroq oculo objec=torum imago exhibeatur, nulla tamen duplicia videntur. — 321.

Phænom. 7.^m Si quis ex apertâ luce in locum obscurum transierit, is densâ ca=ligine illico circumfunditur, pau=llatim tn loco assuefactus res circompositas distinguere incipit. Quod si ex specu in lucem apertum evaserit, ita luminis fulgore per=cellitur, ut primum nil oiō distinc=tum cernat, sed oia sensim sine sensu distincta videri incipiunt. — 322.

Dioptrica elementa.

Phænom. 1.^m Si intra cubiculum occlusum immissus radius exiguo aperto foramine excipiatur vitro seu convexo seu concavo, videtur paulatim a suâ viâ deflectere accedendo ad li=neam vitri superficiei per=pendicularem. — 324.

Phænom. 2.dum Objecta majora videntur, si trans vitrum convexum quam si nudis oculis conspiciantur; trans vitrum autem concavum minora videntur. —————— Pag. 326.

Phænom. 3.m Alii inter hoes remotiora ob=jecta vident, alii autem tantummodo proxima distincte vident, unde priores Presbytæ, alii autem Myopes vocantur. —————— 327.

Probl: Datâ vitri alicujus sphærici convexitate, aut etiam concavitate, seu vitrum utrinque sit convexum aut concavum, idque sive æquabiliter sive inæquabiliter, seu ex unâ parte convexum sit, ex alterâ concavum, seu denique ex unâ parte planum, ex alterâ convexum aut concavum; invenire in ejus axe punctum concursûs radiorum ex eodem corpore lucido profectorum, bisque in trajectu vitri, viz. tum in ingressu, tum in egressu re=fractorum, hoc est, invenire locum imaginis corpus luci=dum exhibentis? —————— 332.

Catoptricæ elementa. 340.

Phænom. 1.m Objectum, cujus imago in speculo plano repræsentatur, pone

Oh Nature! all sufficient! over all!
Enrich me with ye knowledge of thy works!
Snatch me to Heaven; thy rolling wonders there,
World beyond world, in infinite extent,
Profusely scatter'd o'er the blue immense,
Shew me; their motions, periods & their laws,
Give me to scan; thro' the disclosing deep
Light my blind way: the mineral strata there;
Thrust blooming thence the vegetable world;
O'er that ye rising system, more complex,
Of animals; & higher still; the mind,
The varied scene of quick-compounded thought,
And where ye mixing passions endless shift;
These ever open to my ravisht eyes;
A ~~[illegible]~~ search, the flight of time can ne'er exhaust!
But if to that unequal; if the blood,
In sluggish streams about my heart, forbid
That _best_ ambition; under closing shades
Inglorious, lay me by the lowly brook,
And whisper to my dreams. From thee begin,
Dwell all on thee, with thee conclude my Song;
And let me never never stray from thee.

Thompson's Autumn.

DEO JUVANTE,

ET AUSPICE DEI-PARA,

THESES

MATHEMATICAS

Demonſtrare conabitur

JOANNES DELMAS, San-Florenſis.

Exercitationem aperiet ſelectiſſimus Condiſcipulus

CAROLUS GIROU, Ruthenenſis, Convictor.

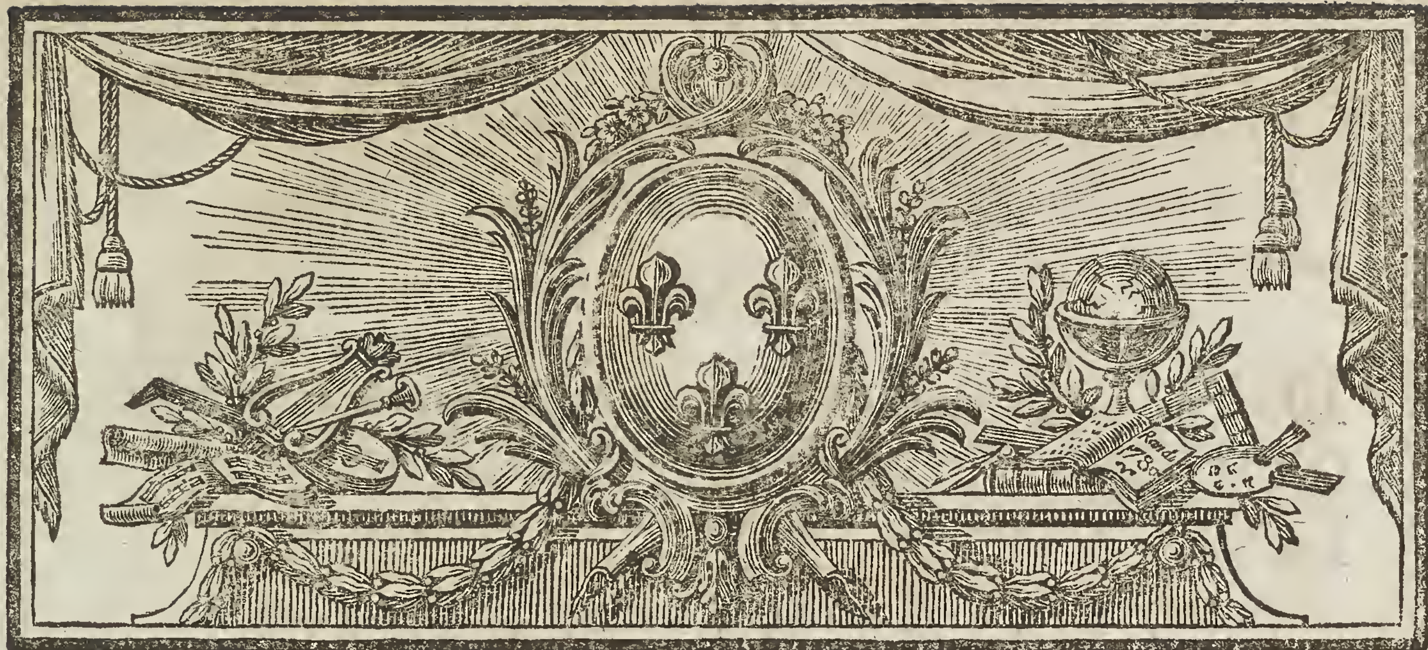
Die Mercurii vigeſimo-ſexto menſis Martii, veſperè, *anno Domini 1788.*



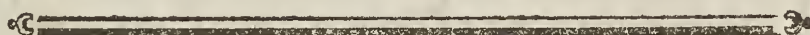
Arbiter erit ANTONIUS MARTY, Licentiatus Theologus, Socius Sorbonicus, & Philoſophiæ Profeſſor.

IN COLLEGIO SORBONÆ-PLESSÆO.

PRO ACTU PUBLICO.



THESES MATHEMATICÆ.



EX ALGEBRA.

I.

MATHESIS in quantitate æſtimandâ verſatur; quæ vel eſt partibus diſtincta & multiplex, vel una & continua: hanc Geometria metiendo, illam Algebra numerando æſtimat. Eſt autem Algebra Arithmetica quædam generalis, quod nuncupando magis, quàm definiendo dicimus. Porrò numerationis principia ſciſcitanti exponemus.

Cùm nulla quantitas, abſoluta ſit $= - a$; ſignorum regula in ſolis polynomiis locum obtinet.

Jam verò, ut integræ unitates, ita etiam unitatis partes computationi ſubjiciuntur; ſed anteà noſſe opportunum quo pacto maximus duorum numerorum diviſor inveniri queat. Tum ſive vulgarium fractionum, ſive decimalium numerationem omnem exequimur.

Exponentem negativum aut fractum nulla quantitas per ſe habet, ſed diviſionem ille, hic radicem deſignat hinc $a^0 = 1$, $Aa^{-n} = \frac{A}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Etſi autem radicalium vices gerunt dignitates fractæ, tamen

suis radicalia obsequuntur legibus. Scilicet 1°. Coefficiente liberantur.

2°. Si fracta in illis potentia est, integra efficitur.

3°. Communi indice donantur duo radicalia vel plura.

4°. Radicalium summa vel differentia assignatur, multiplicantur, dividuntur, &c.

I I.

DIGNITATES polynomii cujuscumque indigitat Neuwtoniana formula,
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n \cdot n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \&c.$$
quam demonstramus; atque hæc quidem ad commodiorem formam ità adducitur :
$$(a+b)^n = a^n, \text{ seu } A + n\,AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \&c.$$
quâ velut admotâ, dignitates radicesque etiam imperfectas detegere in promptu est, & quotos imperfectos in series resolvere.

Hinc
$$1^{\circ}.\ \sqrt{b^2 - c^2} = b - \frac{c^2}{2b} - \frac{c^4}{8b^3} - \&c.$$
$$2^{\circ}.\ \frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + \&c.$$
$$3^{\circ}.\ \frac{2a}{a^2-x^2} = 2 \times \left(\frac{1}{a} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} + \&c.\right)$$

Eædem verò series *indeterminatorum coefficientium* methodo, quam suâ demonstratione illustramus, facilè obtinentur; quin ex ipsâ divisione emergunt; ex quâ etiam singularis illa $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1, \&c. = \frac{1}{2}$; tum illa quoque $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \&c. = \frac{1}{3}$, & permultæ aliæ similes.

I I I.

ÆQUATIONES quaslibet lineares exprimit illa, $Ax \pm B = 0$, cujus quidem leges & usum explicamus. Quadratas omnes exhibet $Ax^2 \pm Bx \pm E = 0$, quam generali methodo solvimus. Cubicas pariter exprimit $Ax^3 \pm Bx^2 \pm Ex \pm F = 0$, cujus quidem solvendæ hæc à nobis ratio demonstratur : « Singulos ultimi termini factores subducimus ab x : & per » singulas differentias totam tentamus æquationem dividere : si divisio accu- » ratè perficitur, factor assumptus est ipsa inquisita quantitas. Valet, in- » quam, hæc ratio, si fractus non est ultimus terminus. » Hinc ad id quod sequitur responsio : « Obsessæ urbis præfectus opem à suo duce per litteras efflagitat, scribens non plura hominum centena sibi præsidio superesse, quàm quot sint unitates in radice positivâ illius æquationis : $x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x - 245 = 0$. Delapsus in hostes nuntius, deprehensæque litteræ; sed nullus in castris Œdipus fuit qui solvere objectum nodum posset :

quale tu ex iſtâ ſchedulâ documentum cepiſſes? inter æquationes gradûs generalis totam hanc claſſem $x^{2n} + ax^n - b = 0$ reſolvimus. Hinc datis ſummâ & producto dignitatum ſimilium, inveniuntur ambo numeri.

I V.

Ex Arithmeticis proportionibus, geometriciſque originem ducit aurea, quam vocant, regula, quæ ortum dat alii vulgò dictæ *de fauſſe poſition.* Hanc ſive *ſimplicem*, ſive *duplicem*, adhibitâ analyſi, demonſtramus. Illa verò enodationem affert quæſtionum vulgò dictarum *de ſociété, d'intérêt, d'alliage*, quas analyticè etiam ſolvimus. Seriem quamlibet Arithmeticam repræſentat formula $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \ldots \omega$.

Eſt autem $\begin{cases} 1^o.\ \int = \dfrac{an + \omega n}{2}. \\ 2^o.\ \omega = a + dn - d. \end{cases}$

hinc datis tribus, ex $a, d, \int, n, \omega$, reſidua deteguntur.

Undè inſerendi numerum n mediorum ratio eſt $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$, loco igitur

$$\div a \cdot x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot \cdot \omega$$

erit $\div a \cdot \dfrac{an + \omega}{n + 1} \cdot \dfrac{an + 2\omega - a}{n + 1} \cdot \dfrac{an + 3\omega - 2a}{n + 1} \cdot \dfrac{an + 4\omega - 3a}{n + 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \omega$

Hinc ſeriei $0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots n - 1$ ſumma $= \dfrac{n^2 - n}{2}$;

ſeriei $1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots\cdots n$ ſumma $= \dfrac{n^2 + n}{2}$;

ſeriei $1.\ 3.\ 5.\ 7 \cdots\cdots 2n - 1$ ſumma $= n^2$.

Seriei cujus vis Arithmeticæ ſummam dignitatum ſimilium exhibet formula :

$$\int t^m = \frac{\omega^{m+1} - a^{m+1} - \left(\dfrac{(m+1) \times m \times d^2 \times \left(\int t^{m-1} - \omega^{m-1}\right)}{2}\right) - \left(\dfrac{(m+1) \times m \times (m-1) \times d^3 \times \left(\int t^{m-2} - \omega^{m-2}\right)}{2 \cdot 3}\right)}{(m+1) \times d}$$

quiſquis fuerit vel numerus terminorum, vel primus, vel ultimus.

Hinc ſumma numerorum naturalium $= \dfrac{\omega^2 + \omega d - a^2 + ad}{2d}$

ſumma quadratorum $\cdots\cdots = \dfrac{\omega^3 - a^3}{3d} + \dfrac{\omega^2 d + a^2 d}{2d} + \dfrac{\omega d^2 - ad^2}{6d}$

ſumma cubicorum $\cdots\cdots = \dfrac{\omega^4 - a^4 + 2\omega^3 d + 2a^3 d + \omega^2 d^2 - a^2 d^2}{4d}$

Hinc in ſerie $1.\ 2.\ 3.\ 4. \ldots n$ eſt :

$$\int t^1 = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \int t^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}, \quad \int t^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Si verò infinitus est terminorum numerus, tunc $\int t^m = \frac{\omega^{m+1}}{m+1}$.

Valet eadem ratio ergà seriem radicum similium.

V.

Series quælibet geometrica in generali illâ continetur : $\div\!\div a : ap : ap^2 : ap^3 \ldots \omega$. Unde 1°. $\omega = ap^{n-1}$; 2°. $\int = \frac{\omega p - a}{p - 1}$. Numeri n mediorum inter duo extrema inserendi rationem præbet formula,

$$\div\!\div a : \sqrt[n+1]{a^n \omega} : \sqrt[n+1]{a^{n-1} \omega^2} : \sqrt[n+1]{a^{n-2} \omega^3} \ldots \sqrt[n+1]{a^0 \omega^{n+1}}.$$

tribus porrò datis ex a, n, s, q, ω, cætera cognoscuntur.

Hinc seriei $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$, &c. Summa est $\int = 1$; ac generatim seriei $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{m^3}$, &c. Summa $= \frac{1}{m-1}$.

V I.

Admirabilis perutilisque logarithmorum theoriæ hæc sunt principia :

1°. $L. 1 = 0$.

2°. $L. (ab) = L. a + L. b$.

3°. $L. (a^n) = n L. a$.

4°. $L. \left(\frac{a}{b}\right) = L. a - L. b$.

5°. $L. (\sqrt[n]{a}) = \frac{L. a}{n}$.

Quibus positis, levi negotio plurimæ solvuntur æquationes analysi vulgari imperviæ. Hinc sequitur enucleatio problematum quæ dici solent *d'intérêt composé*, vel quæ ad provinciæ cujusdam incolarum propagationem pertinent. Valet pro utrisque formula $\int = aq^t$. Aliud etiam resolvimus ità proponi solitum : « Post unam eductam ex dolio pleno vini mensuram, nova infunditur : sed hæc quidem aquæ ; tùm, depromptâ ex dolio » rursùs mensurâ, jacturam reparat rursùm immixta unda. Quot demùm » erunt mensuræ depromendæ, ut in dolio supersit vini quantitas $= \frac{a}{n}$? »

Verùm latiùs patet logarithmorum theoria. Itaque logarithmus naturalis, seu hyperbolicus numeri $(1 \pm x)$ si quæratur, seriebus adhibitis, deprehendetur esse $\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ &c.

Hinc $l. \frac{a+x}{a-x} = 2 \times \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \ldots\right)$.

ſeu commodiùs, $l.m = l.(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6} + \ldots\right)$.

Facilè autem logarithmi naturales in vulgares tabularum logarithmos convertentur, & vice versâ. Dato item numeri cujuſlibet logarithmo, ad numerum ipſum venire ope ſequentis formulæ licebit,

$$n = 1 + l.n + \frac{l.^2 n}{2} + \frac{l.^3 n}{2\cdot 3} + \frac{l.^4 n}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

Undè hyperbolici ſyſtematis baſis eſt $n = 2 \cdot 71828183$.

EX GEOMETRIA SIMPLICI.

I.

GEOMETRIA SIMPLEX lineam, ſuperficiem, ſolidumque conſiderat. Lineæ rectæ ſecum invicem & cùm circulo conferri ſolent. Hinc oriuntur parallelarum, perpendicularum & obliquarum, adeòque angulorum proprietates.

« Anguli porrò cujuſlibet menſura eſt ſemi-ſumma arcuum lateribus » utrinque productis finitorum ».

In polygono quocumque angulorum inſcriptorum ſumma eſt $nx = 2nr - 4r$; itaque $x = \frac{2nr - 4r}{n}$. Exteriorum verò ſumma $= 4r$. Hæc igitur *centralium* ſummæ æqualis eſt. Angulus nempè centralis $= \frac{4r}{n}$, quemadmodùm exterior. Hic in circulo $= \frac{1}{\infty}$; quapropter radius ut tangenti, ità circumferentiæ eſt perpendicularis: directa eſt laterum homologorum in triangulis ſimilibus proportio. Hinc chordarum ſeſe decuſſantium partes ſunt ſibi invicem in proportione inversâ; undè æquatio circuli $y^2 = 2ax - x^2$. Æquilateralis trianguli inſcripti latus $= a\sqrt{3}$, exagoni, $= a$, quadrati $= a\sqrt{2}$, &c.

Si ſint trianguli cujuſvis latera A, C, diſtantia lateris unius à normali in baſim ductâ ex angulo oppoſito ſit $= x$; erit, $B \cdot A + C : : A - C \cdot B \pm 2x$, ex quo ſequitur, ſi tangens circuli angulum faciat extrà circulum cùm ſecante, tùm fore $\div s : t : s - 2a$; atque in omni triangulo rectangulo, eſſe $A^2 = B^2 + C^2$. Si dividatur linea quædam à mediâ & extremâ ratione erit pars media $= \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. Ità exprimitur latus decagoni inſcripti in circulo cujus ſit radius $= a$.

I I.

FIGURÆ cujuſlibet æquabilis aream repræſentat numerorum conſtantium ſumma, inæquabilis autem ſeries Arithmetica.

Ergò ſi parallelogrammi & trianguli ſint baſes $= b$, altitudines $= a$, radii circuli ad circumferentiam ratio $\frac{1}{2}$): c; area primi erit $= ab$; ſe-

cundi $= \frac{ab}{2}$, tertii $= cr^2$. Undè trapezoïs $= (B + b) \times \frac{a}{2}$; superficies cylindri convexa $= 2acr$, coni $= cr\sqrt{a^2 + r^2}$, sphæræ $= 4cr^2$.

Cylindri soliditas $= acr^2$, coni $= \frac{acr^2}{3}$, sphæræ $\frac{4cr^3}{3}$. Ergò sphæra est cylindri circumscripti $\frac{2}{3}$, coni æquilateralis $\frac{4}{9}$.

Arearum & soliditatum comparatio eruitur ex hoc principio: areas videlicet similes, esse inter se ut quadrata dimensionum homologarum, similia verò solida, ut cubos.

Hinc 1°. Figuram invenire, cujus ratio ad alteram similem sit $= \frac{n}{m}$? erit latus quæsitum $= a\sqrt{\frac{n}{m}}$.

Hinc 2°. Solidum indicare, cujus ratio ad alterum simile sit $= \frac{n}{m}$? erit latus quæsitum $= a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$.

Sequentia etiam solvimus problemata:

Circulum invenire cujus area sit æqualis superficiei convexæ coni recti vel coni truncati?

Si apothema $= a$, radius basis $= r$; erit prioris circuli radius $x = \sqrt{ar}$, alterius autem $x = \sqrt{a(R + r)}$.

Soliditatem coni truncati invenire, cujus cognoscantur apothema, & basis utriusque radii.

Sphæram designare quæ datum cylindrum vel conum cujus altitudo $= 2a$, radius basis $= b$, soliditate adæquet. Erit sphæræ radius in priori casu $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \times 2ab^2}$, in altero $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \times 2ab^2}$; est autem $\sqrt[3]{2ab^2}$, secundum è mediis geometricis insertis inter $2a$ & b.

Definire altitudinem coni sphæræ æqualis, cujus basis sit unus è majoribus sphæræ circulis? . . . erit $x = 4b$.

Ac vice versâ, si cono detur altitudo $= 2a$, erit illius basis radius $= a\sqrt{2}$.

Denique cylindrum invenire qui tùm superficiei, tùm soliditatis ratione sphæram adæquet propositam?

Erit altitudo $z = 3a$, radius basis $x = \frac{2}{3}a$.

I I I.

TRIANGULORUM ope similium triangula resolvi possunt, datis nimirum aut duobus lateribus & uno angulo, aut angulis duobus atque uno latere, aut tribus lateribus, sive uno cum cæterorum summâ vel differentiâ. Atque hoc pacto vel rudis geometra potest distantium locorum intervalla

metiri, ſolo etiam interdùm uſus, ſi placeat, ſpeculo. At longè expeditior ſimulque nobilior ſinuum theoria, de quâ nunc agere debemus.

Ratio ſinuum eadem eſt ac laterum oppoſitorum.

Nuncupando A & B latera angulis a & b oppoſita,

habebitur $\quad A + B : A - B :: \text{tang.} \frac{a+b}{2} : \text{tang.} \frac{a-b}{2}.$

Jam ſolutu facillima erit quæſtio illa duplex, datâ trianguli perimetro, ſingulìſque angulis, ſingula definire latera? Cognitis duobus lateribus, horumque angulo, aream æſtimare trianguli? Verùm hæc ad uſum Trigonometriæ tabularum ſpectant. Quibus ipſæ tabulæ nitantur principiis exponendum eſt.

I V.

Cognita arcûs cujuſcumque chordâ, arcûs dupli aut ſubdupli chordam dabunt formulæ ſequentes:

$$d = \frac{b}{a} \times \sqrt{4a^2 - b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{2}ad} - \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{2}ad}.$$

Datis verò duorum arcuum chordis, eorum ſummæ vel differentiæ chorda erit

$$d = \frac{c}{2a} \times \sqrt{4a^2 - b^2} + \frac{b}{2a} \times \sqrt{4a^2 - d^2}.$$

$$x = \frac{b}{2a} \sqrt{(4a^2 - b^2)} - \frac{b}{2a} \sqrt{(4a^2 - d^2)}.$$

Dimidiatæ inſcriptæ loco integrarum aſſumi poſſunt. Exindè ſinuum theoria derivatur. Namque erit, ſuppoſito circuli radio $= 1$,

$$\text{Sin.}^2\, a + \text{coſ.}^2\, a = 1.$$

$$\text{Sin.}\, (a \pm b) = \text{ſin.}\, a\ \text{coſ.}\, b \pm \text{ſin.}\, b\ \text{coſ.}\, a.$$

$$\text{Coſ.}\, (a \pm b) = \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b \mp \text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b.$$

Undè $\text{Sin.}\, 2a = 2\ \text{ſin.}\, a\ \text{coſ.}\, a;\ \text{coſ.}\, 2a = 2\ \text{coſ.}^2\, a - 1.$

$$\text{Sin.}\, 3a = 3\ \text{ſin.}\, a - 4\ \text{ſin.}^3\, a;\ \text{coſ.}\, 3a = 4\ \text{coſ.}^3\, a - 3\ \text{coſ.}\, a, \&c.$$

$$\text{Sin.}\, (30^\circ + b) = \text{ſin.}\, (30^\circ - b) + \text{ſin.}\, b \sqrt{3}.$$

Adeòque peractus ſinuum canon à 0° uſque ad 30°, facilè perduci poteſt uſque ad 90°. Ex præcedentibus formulis aliæ ſequuntur propè modum infinitæ, quarum non nullas indicabimus.

$$\text{Sin.}\, a\ \text{coſ.}\, b = \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\, (a + b) + \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\, (a - b).$$

$$\text{Sin.}\, a\ \text{ſin.}\, b = \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\, (a - b) - \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\, (a + b)$$

$$\text{Coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b = \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\, (a + b) + \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\, (a - b).$$

$$\text{Coſ.}\, a\ \text{ſin.}\, b = \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\, (a + b) - \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\, a - b).$$

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\, a}{2}} \ \ldots\ \text{Coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ.}\, a}{2}} \ \ldots$$

$$\text{Sin.}\, p + \text{ſin.}\, q = 2\ \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\,(p + q)\ \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\,(p - q).$$

$$\text{Sin.}\, p - \text{ſin.}\, q = 2\ \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\,(p - q)\ \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\,(p + q).$$

$$\text{Coſ. } p + \text{coſ. } q = 2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}(p-q).$$

$$\text{Coſ. } q - \text{coſ. } p = 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}(p-q) \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}(p+q).$$

Tangentium verò formulæ hæ ſunt; tang. $(a \pm b) = \frac{\text{tang. } a \pm \text{tang. } b}{1 \mp \text{tang. } a \text{ tang. } b}$ . . .

Tang, $\frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ. } a}{1 + \text{coſ, } a}}$; quæ formulæ pro cotangentibus etiam valent, factâ levi mutatione. Ex valore tangentis $(a+b)$ facilè deducitur tangens (A + B + C, &c.). Supponantur æquales illi arcus, ſit tangens unius ex illis, tang. A; ſit eorum numerus n, habebitur tang. $n \text{A} = n$ $\text{coſ.}^{n-1} \text{A ſin. A} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} \text{coſ.}^{n-3} \text{A ſin. }^{3}\text{A} + \text{\&c.}$

$\text{coſ.}^{n} \text{A} - \frac{n \cdot n-1}{2} \text{coſ.}^{n-2} \text{A ſin.}^{2}\text{A} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{coſ.}^{n-4} \text{A ſin.}^{4}\text{A} - \text{\&c.}$

Undè fit; 1°. ſin. $n \text{A} = n \text{ coſ.}^{n-1} \text{A ſin. A} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} \text{coſ.}^{n-3} \text{A ſin.}^{3} \text{A} + \text{\&c.}$

2°. Coſ. $n \text{A} = \text{coſ.}^{n} \text{A} - \frac{n \cdot n-1}{2} \text{coſ.}^{n-2} \text{A ſin.}^{2} \text{A} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{coſ.}^{n-4} \text{A ſin.}^{4} \text{A} - \text{\&c.}$

3°. Sin. $a = a - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ &c.

4°. Coſ. $a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{a^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} +$ &c. Ergo dato arcu $= a$, facillimè per has formulas ejus ſinus & coſinus detegentur. Ex præcedentibus eruitur $a = \text{ſin. } a + \frac{\text{ſin.}^3 a}{2 \cdot 3} + \frac{3 \text{ ſin.}^5 a}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot \text{ſin.}^7 a}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} +$ &c.

Habetur etiam $a = \text{tangent. } a - \frac{\text{tang.}^3 a}{3} + \frac{\text{tang.}^5 a}{5} - \frac{\text{tang.}^7 a}{7}$. ergo ſive ex ſinu, ſive ex tangente valorem arcûs colligere in promptu eſt. Hinc inveſtigatur ratio diametri ad circumferentiam circuli.

EX CONICIS SECTIONIBUS.

Ut maximè generalis ſit conicarum ſectionum theoria, conum fingimus circulo genitum in quo ordinatarum potentiæ $m+n$, ſint ut potentiæ m & n abſciſſarum. Dividatur iſte conus: erit æquatio curvæ ſectionem finientis

$$y^{m+n} = \frac{p^n}{2^n a^n} x^m (2a \mp x)^n.$$

Si diviſio fit parallelè ad baſim, ſectio erit circulus.

Si parallelè ad latus, ſectio erit *parabola*, fietque æquatio,

$$y^{m+n} = p^n x^m.$$

Cùm

Cùm anti-parallelè ad basim secatur conus, sectionem terminat *ellipsis* cujus æquatio generalis est

$$y^{m+n} = \frac{p^n}{2^n a^n} x^m (2a - x)^n.$$

Demùm quandò parallelè ad axem dividitur, tùm sectio est *hyperbola* cujus natura est

$$y^{m+n} = \frac{p^n}{2^n a^n} x^m (2a + x)^n.$$

Quæ ad triangulum facilè referri potest, fitque $y = \frac{bx}{a}$.

Si fiat m, ut solet plerùmque, $= n = 1$, tunc generalis curvarum primi ordinis æquatio habebitur, nempè

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax \mp x^2);$$

Si ad axem referatur, $= \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$.

Sic $p = \frac{2b^2}{a}$, estque parameter dupla ordinatæ ad focum ductæ.

In curvis omnibus primi ordinis subtangens $= \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$, subnormalis $= \frac{p}{2a}(a \mp x)$.

In parabolâ ordinariâ ad diametrum relatâ $z^2 = u(p + 4x)$.

In ellipsi & hyperbolâ $z^2 = \frac{h^2}{g^2}(2gu \mp u^2)$.

Ratio parabolæ ad circumscriptum rectangulum est $2 : 3$; undè habetur parabolæ quadratura. Paraboloïs verò est $\frac{1}{2}$ cylindri circumscripti. Denique facilem methodum duplicandi cubi parabola suppeditat. Si appelletur E ellipsis circulo inscripta; circulus ipse A, C circulus alter cujus sit radius $x = \sqrt{ab}$, erit $A = E$. Quòd si fingatur C ellipsi inscriptus, erit $\div$ A. E. C.

Cæterùm ellipsoïs $= \frac{2}{3}$ cylindri circumscripti. Nunc ad asymptotos hyperbola referatur, erit ejus æquatio $y^n = x^{-m}$. In primo ordine, $y = \frac{1}{x}$, tangens à summâ hyperbolâ ad asymptotum perducta $= b$; cùmque in eâdem curvâ è centro proficiscantur asymptoti, hinc illas ducendi ratio obvia est. Spatia asymptotica logarithmos abscissarum geometricâ ratione crescentium exhibent.

In omni demùm sectione, æquatio radii osculi est $R = \frac{m^3}{\frac{1}{4}p^2}$.

METHODUS DIRECTA FLUXIONUM.

I.

CALCULUS differentialis à Leibnitzio repertus, *limitum*, sive *exhaustionis* methodo apud veteres familiari, à Newtoño autem renovatæ valdè

affinis, ad uſum expeditior eſt. Antiquorum ac recentiorum principia quæ ſint, & quàm ſimilia, demonſtramus. Methodi igitur limitum ars omnis in eo ferè vertitur, ut quantitatis alicujus creſcentis vel decreſcentis duo termini, ſeu limites, aſſignentur, quorum alter ſit quædam functio quantitatis incognitæ: tum verò ambo limites inter ſeſe adæquentur; ex iſtâ enim comparatione continuò emerget quantitatis inveſtigatæ notitia. Præterea principii loco ſumendum eſt, variabile ſi quid ſit, idem pro nihilo haberi poſſe. His poſitis, ſi variabilis differentia abſciſſarum fiat $= u$, ordinatarum $= z$, formula ſubtangentium in omni ſectione invenitur eſſe $\frac{uy}{z}$, ſubnormalium $\frac{zy}{u}$, quæ quidem à Leibnitzianis formulis penès ſigna paululùm, reipsâ minimè diſcrepant. Methodo etiam limitum uſi, Circulum *infinitarium polygonum* verè nuncupari oſtendimus, &c. Porrò inter hanc rationem & illam Leibnitzii, hoc præcipuè diſcriminis intercedit, quòd prior ex differentiis finitis, altera verò ex infiniteſimis ducit exordium. In hoc autem ambæ conveniunt, quòd imminutas quantitates in ipſis limitibus ſupponunt $= 0$, quantitatum rationes non item. Signorum itaque dx, dy, valor, reſpectu x & y, nullus omninò eſt, adeò ut in Calculo differentiali zero multiplex variumque computationi ſubdatur. Mirum hoc nemini videbitur conſideranti, id quod ſub uno reſpectu nihil ſit, poſſe ſub alio reſpectu aliquid eſſe. Nec verò quiſpiam contendere amet in Calculo Fluxionum negligi aliquid, aut errari; is ſi quidem ipſe magno in errore verſaretur. Neque enim minùs firmitatis ac roboris infiniteſimorum theoriæ ineſt, quàm Geometriæ elementaris dogmatibus.

I I.

Nunc ſi functio X ex *fluentibus* x, y, z, &c. & *conſtantibus* compoſita fiat Z, tunc $dX = Z - X$. Hinc naſcuntur omnes methodi fluxionum regulæ.

Fluxio producti æquatur ſummæ productorum ex fluxione cujuſque factoris in factores reliquos; undè fluxio quantitatis x^n eſt $n x^{n-1} dx$ Eadem regula docet, cùm duæ ſunt fluentes, tunc eſſe

$$dX = A\,dx + B\,dy;$$

ſi tres ſimul fluunt quantitates,

$$dX = A\,dx + B\,dy + E\,dz;$$

ſi quatuor, $\quad dX = A\,dx + B\,dy + E\,dz + F\,du$, &c.

Fractionis fluxio obtinetur, ſi ex producto denominatoris in fluxionem numeratoris ſubducatur numeratoris productum in denominatoris fluxionem, reſiduumque dividatur per denominatoris quadratum. Hâc regulâ, quæ ſuperioris eſt appendix, patet eſſe

$$d\left(\frac{x^n}{y^m}\right) = \frac{n y^m x^{n-1}\,dx - m x^n y^{m-1}\,dy}{y^{2m}}.$$

Ad inveniendas algebricæ quantitatis fluxiones *secundas* hæc conducit æquatio,

$$d(y\,dx) = dy\,dx + y\,ddx.$$

Hinc $$dd(xy) = y\,ddx + x\,ddy + 2\,dy\,dx.$$

Hinc $$dd(x^n) = nx^{n-1}\,ddx + n \times (n-1)\,x^{n-2}\,dx^2.$$

I I I.

Dicendo a & a' primos seriei geometricæ atque b & b' primos arithmeticæ seriei terminos, si est $\frac{b'-b}{a'-a} = m$,

tunc fluxio logarithmi quantitatis x est

$$d(l.\,x) = ma \times \frac{dx}{x}.$$

Ergo si fiant, ut solet, $m = 1$ & $a = 1$, tunc

$$d(l.\,x) = \frac{dx}{x}:$$

$$d(l.\,xy) = \frac{y\,dx + x\,dy}{xy}:$$

$$d\left(l.\,\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}:$$

$$d(l.\,x^n) = \frac{nx^{n-1}\,dx}{x^n}:$$

$$d(l.\,l\,y) = \frac{dy}{y\,l.\,y}.$$

Hinc fluxio quantitatis potest ex datâ logarithmi fluxione colligi. Est enim

$$d(x^n) = x^n \times d(l.\,x^n),$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \times d\left(l.\,\frac{x}{y}\right).$$

Fluxio quantitatis exponentialis y^x est

$$d(y^x) = y^x \times d(l.\,y^x).$$

Hinc si quantitatis a logarithmus $= 1$, tunc

$$d(a^x) = a^x\,dx.$$

Ubi quantitas exprimitur sinu, vel cosinu, vel tangente, &c. arcûs x, tunc

$$d(\text{sin.}\,x) = dx \times \text{cos.}\,x, \qquad d(\text{cos.}\,x) = -dx \times \text{sin.}\,x,$$

$$d(\text{tang.}\,x) = \frac{dx}{\text{cos.}^2\,x}, \qquad d(\text{cot.}\,x) = -\frac{dx}{\text{sin.}^2\,x},$$

$$d(\text{sec.}\,x) = \frac{dx\,\text{sin.}\,x}{\text{cos.}^2\,x}, \qquad d(\text{cosec.}\,x) = -\frac{dx\,\text{cos.}\,x}{\text{sin.}^2\,x},$$

Hinc arcûs x fluxio est

$$+\,dx = \frac{d\,(\text{sin.}\,x)}{\text{cos.}\,x} = \text{cos.}^2\,x \times d\,(\text{tang.}\,x) = \frac{\text{cos.}^2\,x \times d\,(\text{sec.}\,x)}{\text{sin.}\,x},$$

vel $-\,dx = \frac{d\,(\text{cos.}\,x)}{\text{sin.}\,x} = \text{sin.}^2\,x \times d\,(\text{cot.}\,x) = \frac{\text{sin.}^2\,x \times d\,(\text{cosec.}\,x)}{\text{cos.}\,x}.$

Ex methodo fluxionum generalem eruimus *Binomii Newtoniani* demonstrationem, quæ tùm coefficientes, tùm exponentes complectitur. Calculum quoque differentialem, ad demonstrandam *indeterminatorum coefficientium* methodum adhibemus.

DE METHODO TANGENTIUM DIRECTA, ET DE MAXIMIS AC MINIMIS.

SI axi perpendiculares sunt ordinatæ, formula subtangentium est $\frac{ydx}{dy}$, subnormalium $\frac{ydy}{dx}$, normalium $\frac{yds}{dx} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, tangentium $= \frac{yds}{dy}$. In sectionibus autem conicis superiorum ordinum, est $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\,(2ax \mp x^2)}{2ma \mp mx \mp nx}$ est autem $\frac{ydy}{dy} = \frac{(2ma \mp mx \mp nx)\,y^2}{(m+n)\,(2a \mp x^2)}$.

Quantitatis propositæ fluxio secunda $\mp\,ddy$, *maximum* indigitat vel *minimum*. Hujus ope principii sequentia solvimus problemata :

1°. Maximam *in circulo aut ellipsi applicatam invenire ?*

2°. *Quantitatem* a *sic dividere ut* $x^m \times (a - x)^n$ *sit* maximum ?

Erit $x = \frac{m}{m+n}, a,$ & $a - x = \frac{n}{n+m}\,a;$

3°. *Eamdem quantitatem* a *in tres partes ità dividere, ut* $x^m\,y^n\,z^r$ sit maximum ?

Erit $x = \frac{m}{n+m+r}\,a,\quad y = \frac{n}{n+m+r}\,a,$

$z = \frac{r}{n+m+r}\,a.$

4°. *Ex puncto in axe assignato, ad curvam quamlibet ducere lineam quæ sit* brevissima ?

5°. *Invenire angulum inter duo data latera comprehensum, ut maxima sit area trianguli ?*

6°. *Datâ perimetro, maximum indicare triangulum, vel rectangulum ?*

7°. *Ex triangulis circulo inscriptis* maximum *invenire ?*

8°. *Inter parabolas ex ejusdem coni recti sectione oriundas* maximam *determinare ?*

9°. *Ex omnibus conis sphæræ inscriptis, eum seligere qui* maximâ *donetur superficie convexâ, illum verò qui soliditate sit* maximâ *?*

10°. *Ex omnibus parallelipipedis cubum datum adæquantibus, assignare illud quod minimâ vestiatur superficie ?*

8°. *In rhumbis quibus apes alveolos occludere solent, angulum assignare minimæ superficiei idoneum?* Est sinus semi-anguli quæsiti $= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} a = \frac{1}{\sqrt{3}}$; calculo absoluto, angulus totus est 70°, 31′, 43″.

De evolutis et radio osculi.

Si perpendiculariter in axem incidant ordinatæ, ponaturque dx constans, radius circuli curvam osculantis est: $R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\, ddy}$, quæ commodè in hanc alteram resolvitur: $R = \frac{m^3\, dx^2}{-y^3\, ddy}$. Cùm verò applicatæ ex eodem puncto ductæ sunt, radium osculi exhibet æquatio $R = \frac{y\, ds}{ds^2 dx - y\, dx\, ddy}$; ex quâ facilè prima eruitur, si $y = \infty$. Radium hunc in quatuor sectionibus conicis indicabimus.

Parabolæ *Apollonianæ* evoluta exprimitur æquatione: $z^3 = \frac{27}{16} p u^2$; hæc proindè est altera parabola cubica, cujus parameter $= \frac{27}{16}$ parametri quadratæ parabolæ.

Methodus inversa fluxionum.

Ex propositâ quantitatis fluxione, ad quantitatem ipsam reducit methodus inversa fluxionum.

I.

Si in singulis terminis unica fluit quantitas, *ut ii integrentur, delenda in unoquoque fluxionis nota, index fluentis unitate augendus, ac per hunc ità auctum quisque terminus dividendus.*

Hinc $\int a x^n\, dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C$.

Deficit tamen ea regula, ubi est index $= -1$; sed tunc $\int a x^{-1}\, dx = a l. x$. Valet autem quandòque ergà binomias fluxiones; nempè integrari potest

1°. $dX = a x^m\, dx\, (b \pm c x^n)^r$,

cùm r aut $= 0$, aut *positivus* est, *finitus*, & *integer*, vel etiam cùm r est fractus, modo sit $m = n - 1$, aut si $m + 1 = nq$, aut si est ratio certa constansque inter $a x^m\, dx$ & $d(c x^n)$.

2°. Integrari etiam potest $dX = a x^{nq+n-1}\, dx\, (b \pm c x^n)^{\pm\frac{r}{p}}$ quandò q est *integer*, *finitus*, ac *positivus*.

Si x utrumque afficiat binomii terminum, ex alterutro facilè ablegabitur. Proindè $a dx\, (bx \pm cx^4)^2$, fiet, $a x^2 dx\, (b \pm cx^3)^2$, & sic continuò integrari poterit.

In altero binomii termino interdùm expedit mutasse signum exponentis.

Est autem $(b+fx^m)^r = x^m (f+bx^{-m})^r$.

Quandò autem nulla ex memoratis exponentium r, m, n, rationibus in propositâ fluxione $ax^m dx (b \pm cx^n)^r$ locum habet, reliquum est ut $(b \pm cx^n)^r$, ope Newtoni formulæ in seriem resolvatur, & singuli hujus seriei termini seorsim integrentur.

3°. Adhiberi potest generalis integrandi regula ergà omnes æquationes hujus generis, $dX = \frac{2a\,dx}{a^2 - x^2}$;

nempè erit $X = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \&c.\right) + C$.

Hinc obvia est ratio inveniendi logarithmum *naturalem*, seu *hyperbolicum* propositæ quantitatis.

Est enim $l.\frac{a+x}{a-x} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \&c.\right)$ ut suprà.

Si $a=3, x=1$, erit $lh.\ 2 = 0,6931456$, $lh.\ 10 = 2,3025803$.

4°. Demùm valet regula ad integrandum $z^m y^n dx$, si constans sit ratio inter $y^n dx$ & $z^r dz$.

Erit tùm $\int z^m y^n dx = \frac{b z^{r+m+1}}{a(m+r+1)} + C$.

I I.

Si duplex quantitas fluit: *Integrentur omnes termini in quibus est factor* dx; *tùm integralis inventæ fluxio ex propositâ subducatur, residuum, si quod sit, denuò integretur, & sic deinceps; summa integralium inventarum erit tota integralis quæsita.*

Hinc $\begin{cases} \int (XdZ + ZdX) = ZX + C. \\ \int \frac{ZdX - XdZ}{Z^2} = \frac{X}{Z} + C. \end{cases}$

Valet hæc regula ad integrandas æquationes sequentibus similes,

$dX = (dx + dy)\sqrt{x+y}$,

$dX = (xdy + ydx + 2xdx)\sqrt[n]{(xy + x^2)^m}$.

Hoc est, cùm quantitas radicale afficiens, est fluxio illius quæ radicali afficitur, non habitâ ratione exponentis m.

In omni fluxione duarum variabilium $dX = Adx + Bdy$. Quæ ut integrari possit, oportet esse $\frac{Ad^y}{dy} = \frac{Bd^x}{dx}$.

Quòd si tres adsint variabiles, ut locum habeat integratio, debet esse

1°. $\frac{Ad^y}{dy} = \frac{Bd^x}{dx}$; 2°. $\frac{Ad^z}{dz} = \frac{Cd^x}{dx}$; 3°. $\frac{Bd^z}{dz} = \frac{Cd^y}{dy}$.

Hinc se integrari patitur $\frac{1}{3} y^3 dx + x^2 dy$.

Est autem $2a^3 ydx + a^2 xdy$, integrationis impatiens.

I I I.

Logarithmi ad quodlibet ſyſtema pertinentis fluxio integratur, ſi in hujus ſyſtematis modulum & in primum ſeriei geometricæ terminum a, ducatur naturalis logarithmus quantitatis variabilis.

Hinc 1°. ſi fingitur $a = 1$, ut in tabulis, erit $lt.\ x = m\,lh.\ x$; proindè $m = \frac{lt.\ x}{lh.\ x}$. Undè in tabulis $m = \frac{1}{2{,}3025850}$; & hujus quidem ope multò facilior evadit tabulas condendi ratio.

Hinc 2°. ſi fingitur quoque, ut plerùmque ſolet, $m = 1$, erit $\int \frac{dx}{x} = lh.x$, & generatim $\int x^n dx\, l^m.\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(l^m.\, x - \frac{ml.^{m-1}x}{n+1} + \frac{m(m-1)\,l.^{m-2}x}{(n+1)^2} - \&c. \right)$ Fluxio exponentialis $y^x\, d\,(l.\, y^x)$ integrata $= y^x + C$.

Si integranda ſit fluxio ſinûs, vel coſinûs, erit

$$\int \text{ſin.}^m x\, dx\ \text{coſ.}\ x = \frac{\text{ſin.}^{m+1} x}{m+1} + C,$$

$$\int - \text{coſ.}^m x\, dx\ \text{ſin.}\ x = \frac{\text{coſ.}^{m-1} x}{m+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\text{ſin.}\ x} = l.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\text{coſ.}\ x} = l.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} x) + C.$$

Definiendæ conſtantis C hanc rationem exhibemus : *Fingatur fluens* x $= 0$; *ſi tunc evaneſcit tota integralis inventa, eſt item* C $= 0$; *ſin autem manet reſiduum* $\pm$ R, *tùm eſt* C $= \mp$ R.

I V.

Superficiei cujuſlibet planæ elementum eſt $y\,dx$. Integra igitur ſuperficies $= \int y\,dx$. Quæ formula quadraturam præbet omnis figuræ, in quâ ordinata eſt quædam abſciſſæ functio. Hinc area trianguli $= \frac{1}{2} xy$; parabolæ, $\frac{n+m}{n+2m} xy$; hyperbolæ ad aſymptotos relatæ, $\frac{n}{n-m} xy$; hinc in hyperbolâ tantùm primi ordinis aſymptoticum ſpatium $= \infty$. Circuli, ellipſis, hyperbolæ area eſt

$$\int y\,dx = \frac{a}{b} \int \sqrt[m+n]{x^m\,(2a \mp x)^n}.$$

Undè iſtarum quadratura curvarum finitis terminis obtineri nequit. Tamen ſi dati circuli periferia ſit $= y$, radius $= x$, erit $\int y dx = y \times \frac{x}{2}$.

Ellipsis autem area, si periferia circuli huic circumscripti dicatur A, erit $= A b$.

Rectificationem arcûs finiti in omni curvâ dabit formula $\int = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Itaque invenietur arcus circularis, ut suprà, $a = \text{sin.}\, a + \frac{\text{sin.}^3\, a}{2 \cdot 3} + \&c.$

Formulâ $\int 2cy\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, vel $\int 2cmdx$, quadraturam afferet superficiei convexæ solidi revolutâ curvâ generati. Hinc sphæræ, coni, parabolæ, &c. superficies, ut in Geometriâ simplici.

Cubaturæ formula est $\int cy^2 dx$. Hinc sphæra, pariterque ellipsoïs $= \frac{2}{3}$ cylindri circumscripti; conus $\frac{1}{3}$; paraboloïs $\frac{m+n}{3m+n}$. Hyperboloïs denique circà asymptotum generatus, $= \frac{n-2m}{n}$ basis suæ in longitudinem ductæ.

METHODUS TANGENTIUM INVERSA.

METHODO tangentium inversâ, reditus fit ex lineis curvæ assignatis, aut ex areâ datâ, aut ex soliditate per rotationem genitâ, ad curvæ naturam. Hæc autem solvimus problemata : 1°. invenire curvam, cujus subtangens sit $= \frac{n+m}{m} x$, vel subnormalis $= \frac{my^2}{(n+m)x}$. 2°. curvam invenire quæ constantem habeat subnormalem, vel eam cujus area sit $\frac{x^3}{3p}$. 3°. invenire figuram in quâ subtangens sit $= y$, vel subnormalis $= x$, vel $= a$. 4°. curvam invenire cujus subnormalis sit $a - x$, eam verò cujus area sit $= \frac{2}{3} xy$, vel eam cujus area sit $= \frac{y^4}{a^2}$. 5°. Figuram invenire cujus area sit $= \frac{1}{2} xy$, vel $\frac{n}{n-m} xy$. 6°. Invenire curvam genitricem solidi $\frac{n}{n-2m} x \times cy^2$, vel solidi $= \frac{n+m}{n+3m} x \times cy^2$. 7°. Tandem invenire curvam cujus normalis sit ubique constans & $= a$,

Ex Typographiâ SEGUY-THIBOUST, Academiæ Parisiensis Typographi, in plateâ Cameracensi, 1788.

ELEMENTA MATHESEOS.

I. *Mathematicæ* vocantur eæ omnes ſcientiæ, quæ magnitudines ſpectant, ad detegendam earum vel æqualitatem vel inæqualitatem.

Magnitudinis nomine id omne intelligitur; quod augeri aut minui poteſt : ſic lineæ, numeri, motus &c, totidem ſunt magnitudines. Magnitudo aliâ voce dicitur *quantitas*.

II. Mathematicæ in duas claſſes diſtribuuntur : aliæ ſcilicet *puræ*, aliæ *mixtæ*.

III. Puræ eæ ſunt quæ magnitudines generatim conſiderant independenter à qualitatibus ſenſibilibus, quales ſunt durities, fluiditas, gravitas &c.

IV. Mixtæ dicuntur quæ varias magnitudinum ſpecies cum qualitatibus ſenſibilibus attingunt. Tales ſunt *Aſtronomia*, *Optica*, *Dioptrica* &c.

Hoc in compendio Mathematicas dumtaxat puras, quæ in Arithmeticam, Algebram & Geometriam dividuntur, perſtringemus.

Principia, quibus utuntur Mathematici ſuis in ratiociniis, ſunt vel definitiones, vel *axiomata*, vel *poſtulata*.

V. Definitiones ſunt terminorum explicationes, quorum determinatur ſenſus ad vitandam confuſionem.

VI. Axioma eſt propoſitio per ſe manifeſta.

VII. Poſtulatum eſt id quod fieri non repugnat. Sic poſtulant Geometræ ut linea ab uno puncto ad aliud ducatur.

His ſolum principiis Mathematici ſuas omnes demonſtrant propoſitiones, quæ quadruplicis ſunt generis, theoremata, problemata, corollaria & lemmata.

VIII. Theorema eſt propoſitio, cujus ſolummodò demonſtranda eſt veritas.

IX. Problema eſt propoſitio in quâ aliquid faciendum proponitur, ſimulque ſolutionis modus profertur.

X. Corollarium eſt propoſitio, cujus veritas ex præcedenti ſequitur.

XI. Lemma eſt propoſitio quæ aſſumitur ut per eam alia demonſtretur.

Præter propoſitiones prædictas adhibentur quandoque obſervationes, adhibentur & ſcholia, ad majorem propoſitionum explicationem, vel ad magis declarandum earum uſum.

Nunc exponere juvat axiomata quædam, quibus tota innititur matheſis.

Primum. Totum eſt majus ſuâ parte & æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Secundum. Quæ eidem æqualia ſunt, ea quoque inter ſe æqualia ſunt adeoque quod uno æqualium majus eſt, aut minus, altero quoque eſt majus aut minus.

Tertium. Si æqualibus æqualia addideris, tota erunt æqualia.

Quartum. Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanebunt, erunt æqualia,

Quintum. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

Sextum. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

Septimum. Quæ ejuſdem dimidia ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia, quæ ejuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

Octavum. Quælibet quantitas ſibi ipſi æqualis eſt; ſemelque in ſeipsâ continetur.

Notandum apud mathematicos ſignum hoc $+$ *eſſe ſignum additionis : hoc aliud* $-$ *ſubſtractionis : hoc* $=$ *æqualitatis : iſtud* $\times$ *ſignum multiplicationis : hoc* $<$ *quantitatis minoris : denique iſtud* $>$ *quantitatis majoris.*

TRACTATUS PRIMUS.
DE ARITHMETICA.

1. ARithmetica eſt ſcientia numerorum : numerus eſt unitatum vel partium unitatis collectio : unitas verò forma totius, prout totum eſt.

2. Numerus alius integer, alius fractus, alius complexus, alius incomplexus.

DEFINITIONES.

Prima. Numerus integer eſt collectio multorum entium, quæ ſpectantur ut tota, talis eſt collectio nummorum.

Secunda. Numerus fractus ille eſt qui vel unam,

vel plures continet partes æquales, in quas diviſa concipitur unitas : v. g. Si unitas intelligatur diviſa in duodecim partes æquales, quarum aſſumantur quinque, illæ 5 primæ partes fractionem conſtituent, quæ hoc ſcribetur modo $\frac{5}{12}$

Tertia. Numerus incomplexus ille eſt qui unicam continet quantitatis ſpeciem, v. g. libras.

Quarta. Numerus complexus è contrario eſt qui plures continet quantitatum ſpecies ; v. g. libras, aſſes & denarios.

AXIOMA.

3. *In ſerie numerorum, valor cujuſlibet cyphræ augetur in proportione decuplâ progrediendo à dextrâ ad ſiniſtram.*

Explicatur: omnibus notum eſt decem eſſe characteres in calculo uſitatos, ſc. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; quorum 1us, valore deſtitutus, cæterorum nihilominùs valorem augere poteſt. Quippè inter homines ſtatutum eſt, duplicem dare cuilibet cyphræ valorem, abſolutum nempè & relativum. Valor abſolutus is eſt qui competit cuilibet notæ arithmeticæ ſolitariè ſumptæ : ſic valor abſolutus cyphræ 4, eſt quatuor unitatum. Valor relativus is eſt qui notæ arithmeticæ competit ratione loci quem, in plurium cyphrarum ſerie, occupat : ſic valor relativus ejuſdem cyphræ 4 in ſequenti ſerie, 40, eſt quatuor decadum ; in hac verò 400, quatuor centuriarum &c. Ex quibus patet cyphram quamlibet ſemper acquirere valorem decies majorem quoties uno loco verſus ſiniſtram promovetur: nam, in præfatis exemplis, quatuor decades æquivalent decem unitatibus quater ſumptis, & quatuor centuriæ decem decadibus quater acceptis.

Hinc 1° unitas cyphræ poſitivæ cujuſcumque, majoris eſt valoris quam omnes cyphræ ſequentes ſic in hoc exemplo, 199, plus valet prima unitàs quam ſequentes characteres. 2°. Quælibet unius cyphræ unitas æquivalet decem unitatibus cyphræ immediatè ſequentis. 3°. Si cyphra 0 in fine cujuſlibet cyphrarum ſeriei collocetur : totius ſeriei valorem decies efficit majorem ; ſiquidem per hujus notæ appoſitionem quilibet characteres uno verſus ſiniſtram loco promoventur, adeoque valorem relativum decies majorem acquirunt. Ob eandem rationem ſumma fit centies major ſi ei nota 0 bis addatur & ſic deinceps. Ob rationem contrariam ſumma data fit decies minor ſi nota 0 ſemel, centies verò ſi bis auferatur & ſic deinceps.

Si multos habueris numeros, quorum determinandus ſit valor, hæc obſerva: 1us. Ad dexteram ſcriptus ſignificat unitates ſimpliciter. 2us. Unitatum decades. 3us. Decadum decades ſeu centurias unitatum. 4us. Decades centuriarum, ſeu unitates millium. 5us. Decades millium. 6us. Centurias millium. 7us. Unitates millionum. 8us. Decades millionum. 9us. Centurias millionum. 10us. Unitates billionum. 11us. Decades billionum ; & ſic conſequenter per unitates decades & centurias. Hinc tota characterum collectio diſtribuenda eſt per triades, incipiendo à parte dextrâ ſicut apparet in ſequenti ſchemate.

SCHEMA.

unitates	centuriæ	decades	unitates	centuriæ	decades	unitates	centuriæ	decades	unitates	centuriæ	decades	unitates	centuriæ	decades	unitates
3,	5	6	0,	7	8	9,	1	0	8,	9	3	2,	9	4	5.
quatrillionum	trillionum			billionum			millionum			millium			objectorum		

Sic igitur totam illam numerorum collectionem appellabis : tres quatrilliones, quingenti ſexaginta trilliones, ſeptingenti octoginta novem billiones ; centum octo milliones ; nonginta triginta duo millia ; nonginta quadraginta quinque.

Quatuor ſunt præcipuæ operationes arithmeticæ ; additio nimirum, ſubſtractio, multiplicatio, & diviſio, de quibus ſigillatim.

DEFINITIO PRIMA.

4. Additio eſt operatio quâ plures numeri in unam colliguntur ſummam. Numeri dati dicuntur ſummandi, quæſitus verò ſumma ſeu aggregatum.

5. *Duplex eſt ſpecies additionis numerorum integrorum, ſimplex nimirum & complexa. Simplex eſt multorum numerorum homogeneorum ſeu incomplexorum in unicam ſummam collectio : complexa verò eſt multorum numerorum heterogeneorum ſeu complexorum in ſummam unicam adunatio.*

PROBLEMA PRIMUM.

6. *Numeros homogeneos in unam ſummam colligere.*

RESOLUTIO.

7. Numeri dati ſub invicem ita ſcribantur, v.

unitates unitatibus, decades decadibus, centuriæ centuriis &c respondeant: deindè numeris subducenda linea: observanda demùm regula sequens.

8. Incipiendum à columnâ unitatum, quarum assumitur summa: duplex contingere potest casus; vel enim summa hæc unicâ exprimi potest cyphrâ, v. g. 8; tuncque scribendum 8 sub unitatibus; vel unitatum summa nonnisi duabus exprimi potest cyphris: hoc in casu cyphrarum ultima, idest quæ versus dextram reperitur, sub unitatum columnâ scribenda est. V. g. Si adsint 25 unitates, collocatur 5 sub unitatum columna ac retinetur 2, quod decades denotat, ut decadibus, quæ sunt in vicinâ versus lævam columnâ, addatur. Eodem modo operandum circa decadum, centuriarum &c, columnas.

SCHOLION.

9. *Dum in quibusdam columnis*, v. g. *in decadum columnâ, nulla reperitur cyphra positiva, tunc subscribitur* o, *si nihil ex unitatum columnâ retentum fuerit: si secus, scribendum quod retentum est.*

V. g. sint numeri sequentes addendi iis dispositis, prout suprà dictum est, (7) operandum, 1° circa unitates, 2° circa decades &c. Dico igitur: 2 & 3 dant 5, 5 & 3 dant 8, scribo 8 sub columnâ unitatum; tum transiens ad decadum columnam dico: 5 & 2 dant 7, 7 & 3 dant 10: cum hæc decadum summa nonnisi duabus cyphris exprimi valeat, ultimam, scilicet o, scribo sub decadibus, & 1 mente retineo pro centuriarum columnâ (8) circa quam operor incipiendo ab 1, quod retinui; dico igitur 1 & 2 dant 3, 3 & 2 dant 5, 5 & 4 dant 9, quod scribo sub centuriarum columnâ: procedo deindè ad millia, in quorum columna solummodò 8 est positivum, scribo igitur 8. Tum venio ad decades millium & dico 6 & 3 dant 9, 9 & 5 dant 14. Ultimam cyphram, scilicet 4 scribo, & retineo 1 pro columnâ centuriarum millium, circa quam similiter operor dicens: 1 & 5 dant 6, 6 & 6 dant 12, 12 & 7 dant 19, 19 & 6 dant 25: scribo 5 & 2 retineo pro columnâ millionum: dico igitur 2 & 3 dant 5, 5 & 4 dant 9, 9 & 6 dant 15, subscribo 5, cui residuum præmitto.

3560252
4630023
6758200
600433
15548908

10. Eodem modo adduntur numeri heterogenei seu complexi. Colliguntur nempè tot unitates de specie minore, quod requiruntur ad conflandam unitatem speciei proximè majoris: atque ita unitas toties retinetur addenda seriei proximè majori, quoties ea ex minore conflata est. Id verò quod de specie minore ad unitatem proximè majorem assurgere non potest, suo loco scribitur.

V. g.	45 libræ	16 asses	9 denarii.
	32	12	7
	53	5	11
erit summa.	131	15	3

Cum enim 12 denarii conficiant assem, in serie denariorum valor assis bis colligitur, ac super sunt 3, scribuntur itaque 3 infra lineam in denariorum serie, & 2 adduntur seriei assium. Similiter quoniam libra 20 assibus constat, in serie assium valor libræ semel colligitur, relictis 15 assibus. Quare 15 in serie assium reponuntur, & 1 libris connumeratur. Reliqua ut in problemate aguntur. (6)

SCHOLION.

Examen additionis fit per substractionem: hoc modo.

1. *Colligantur sigillatim in unam summam singulæ series verticales, quibus constant numeri summandi, incipiendo à sinistrâ & progrediendo versùs dextram.*

2. *Summæ partiales subtrahantur à notis summæ quæ singulis seriebus respondent quod si in loco dextimo qui est unitatum, relinquatur cyphra* o, *additio ritè peracta est. Sit exemplum additionis.*

ABCD
3579
8462
5376
17417
1210

Collectis in unam summam notis in serie *A* 16 subducatur ex 17 & residua 1 scribatur sub 7. Similiter summa notarum seriei *B* 12 subducatur ex 14 residuo 2 sub 4 scripto. Summa notarum in serie *C* 20 auferatur ex 21 & residua 1 ponatur sub 1 denique si summa seriei *D* 17 ex 17 subtrahatur, relinquitur o quod indicio est summam 17417 esse summam quæsitam: nam ex operatione patet à millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summandorum & à centuriis, decadibus, unitatibus summæ omnes centurias, decades, unitates summandorum. Quod si ergo operatione absolutâ nihil relinquitur, summa tot præcisè millenarios, centurias, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumpti continent, adeoque summa numeris summandis simul sumptis æqualis est consequentur additio ritè peracta.

DEMONSTRATIO ADDITIONIS.

11. Per additionem summa quædam totalis

quæritur, quæ numeros plures propositos contineant. Atqui, regulas præscriptas observando, summa totalis reperitur, quæ numeros omnes propositos contineat, quandoquidem summa unitatum, decadum, centuriarum &c assumatur. Ergo &c. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIO II.

12. Substractio est operatio, quâ ex majore numero aufertur minor, ut si ex 12 auferantur 9. Numerus qui subducitur, *subtrahendus* dicitur, alter à quo fit subductio, *minuendus*, qui denique ex substractione resultat, *residuum* vel etiam *differentia* vocatur.

SCHOLION.

Ex prædictâ definitione liquet quod substractio consistat in investigandâ parte cujusdam totius, cujus jam altera pars cognoscitur, sicut & ipsum totum duas has partes continens.

PROBLEMA SECUNDUM.

Numerum minorem è majore subrahere.

13. 1°. Numerus minor sub majore scribatur, sicut in additione (7).

2°. Lineâ subductâ unitates ab unitatibus, decades à decadibus &c subtrahantur; ita ut residua unitatum sub unitatibus, decadum sub decadibus &c scribantur.

3°. Tres occurrere possunt casus: primus. Si cyphra inferior unitates denotans sit minor superiore; tuncque residuum subscribitur in eâdem serie. Secundus: Si æquales fuerint ambæ cyphræ; tuncque, cum nihil supersit, scribitur zero. Tertius. Si cyphra major à minore subtrahenda occurrat; tuncque ut substractio peragatur, minori addetur unitas similis unitatibus seriei proximè sinisterioris, quæ unitas valebit 10 in serie dexteriore, si numeri fuerint homogenei. Ne tamen hinc irrepat error characteri sinisteriori mox subtrahendo per mentem addetur unitas; immò etsi nullus à sinistris esset character subtrahendus, nihilominùs ibi restituetur unitas prædicta, atque ita fiet compensatio.

Sit numerus major =	90011
ex quo si subtrahas	73756
residuum erit =	16255

1°. Igitur numeris, prout dictum fuit (13) dispositis, quoniam 6 subtrahi non possunt ex 1. Ideò fingo unitatem decadum translatam in sedem unitatum simplicium; deindè ex 11 subtraho 6, & subscribo residuum 5.

2°. Unitatem decadum mutuatam addo quinque decadibus numeri minoris, & adsunt sex decades: tum procedo ad substractionem seriei sinisterioris, verum cùm 6 ex 1 subtrahi non possint, rursùs fingo unitatem centuriarum translatam in sedem decadum: tum ex 11 subtraho 6, & subscribo residuum 5.

3°. Unitatem mutuatam addo septem centuriis numeri minoris, & adsunt 8. Tum, quoniam 8 ex 0 subtrahi non possunt, addo unitatem millium seriei centuriarum, atque substractis 8 ex 10, subscribo residuum 2.

4°. Unitatem mutuatam, seu numero superiori additam pariter addo tribus millium unitatibus numeri minoris, & adsunt 4: 4 ex 0 subtrahere non valens iterum fingo unam decadem millium translatam in sedem unitatum millium: tùm subtraho 4 ex 10, & subscribo residuum 6.

5°. Denique unitatem mutuatam addo septem decadibus millium numeri minoris, & exurgunt 8. Tum subtraho 8 ex 9, & subscribo residuum 1, hic terminatur operatio, quæsitusque habetur numerus.

14. Numerorum heterogeneorum substractio à priori in eo tantum differt, quod unitas, quæ notæ minuendæ addi debet, quando ipsa est subtrahendâ minor, non semper 10, sed tot unitates valeat quot requiruntur de specie minore ad constituendum unitatis speciei majoris valorem.

V. g. Si ex	12 lib.	8 ass.	3 den.
subtrahas	8	12	9
remanent	3	15	6

Unitas enim assium, quam addere debes tribus denariis, valet 12 ideòque dices, 9 ex 15, restant 6. Tum hanc unitatem restituens assibus subtrahendis, dicis, 13 ex 8 subtrahi nequeunt: quapropter 8 assibus addis unitatem librarum, seu 20 asses, atque ità, si ex 28 assibus subtrahis 13 restant 15. Tandem prædictâ unitate libris subtrahendis restitutâ, nempè ablatis 9 ex 12, habes residuum 3.

15. *Probatio substractionis fit per additionem: scilicet numerus subtrahendus addendus est differentiæ, & summa resultans numero minuendo æqualis futura est, si ritè fuerit operatio peracta.*

DEMONSTRATIO SUBSTRACTIONIS.

16. Substractio eo tendit, ut inveniatur residuum numeri minuendi, postquàm ab eo sublatus fuerit numerus subtrahendus. Atqui, observando

regulam præſcriptam ; hoc invenitur reſiduum ; ſi quidem juxtà hanc regulam reſiduum aſſumitur unitatum, decadum &c ; ergo reſiduum invenitur numeri minuendi, quod reſiduum exprimit exceſſum hujus numeri ſuprà alium ſubtrahendum. Quod erat demonſtrandum.

DE MULTIPLICATIONE.

DEFINITIO III.

17. Multiplicatio eſt operatio, quâ cognitis duobus numeris, quæritur & detegitur tertius numerus, qui toties unum è duobus cognitis contineat, quot ſunt unitates in altero.

COROLLARIUM.

18. Hinc unum numerum per alterum multiplicare, eſt ipſum toties aſſumere, quot ſunt in altero unitates.

OBSERVATIO PRIMA.

Multiplicatio eſt quædam additionis ſpecies nam v. g. multiplicare 5 per 4, eſt quærere ſummam reſultantem vel ex quater quinquies, vel ex quinquies quater.

I I.

Numerus quæſitus dicitur *productum*, vel *factum* ; numeri dati *factores* & etiam *radices producti* : Specialiter autem, factorum alter qui aliquoties ſumitur, vocatur *multiplicandus* : alter verò, qui indicat quoties ille ſumatur, *multiplicator*.

I I I.

Productum ſemper erit idem, ſive numerus multiplicandus ducatur in multiplicatorem, ſive multiplicator in multiplicandum. Nam, v. g. perindè eſt ſive dixeris *quater quinquies*, ſive *quinquies quater* : Semper enim reſultabit productum 20.

PROBLEMA III.

Numerum datum per alium multiplicare.

RESOLUTIO.

19. 1°. Multiplicator ſub multiplicando ſcribatur, ſicut in additione.

2°. Linea ſubductâ, multiplicentur unitates decades &c multiplicandi, per unitates multiplicatoris, atque producta ſcribantur in unâ & eadem ſerie, ità ut tamen ſi decades in aliquo producto reperiantur, hæ retineantur, ac producto proximè ſiniſteriori annumerentur.

3°. Si multiplicator ex decadibus conſtet, per eas multiplicari etiam debent ſingulæ notæ multiplicandi, ineundo aliam ſeriem ſub priore, ſic tamen ut hanc ſeriem ſcribere incipias retrocedendo uno versùs ſiniſtram loco, quoniam ipſa, ex hypotheſi, eſt productum multiplicandi per decades multiplicatoris.

4°. Idem obſervandum, ſi multiplicator ex centenariis ; ſi ex millenariis &c conſtet.

5°. Producta partialia addantur ; additio hæc factum quæſitum dabit.

Ut autem facilius peragatur hæc operatio, cognoſcenda ſunt producta numerorum per invicem, quæ ſequenti exhibentur ſchemate.

3 ⋈ 3 = 9	4 ⋈ 3 = 12	5 ⋈ 3 = 15	6 ⋈ 3 = 18
3 ⋈ 4 = 12	4 ⋈ 4 = 16	5 ⋈ 4 = 20	6 ⋈ 4 = 24
3 ⋈ 5 = 15	4 ⋈ 5 = 20	5 ⋈ 5 = 25	6 ⋈ 5 = 30
3 ⋈ 6 = 18	4 ⋈ 6 = 24	5 ⋈ 6 = 30	6 ⋈ 6 = 36
3 ⋈ 7 = 21	4 ⋈ 7 = 28	5 ⋈ 7 = 35	6 ⋈ 7 = 42
3 ⋈ 8 = 24	4 ⋈ 8 = 32	5 ⋈ 8 = 40	6 ⋈ 8 = 48
3 ⋈ 9 = 27	4 ⋈ 9 = 36	5 ⋈ 9 = 45	6 ⋈ 9 = 54
7 ⋈ 3 = 21	8 ⋈ 3 = 24	9 ⋈ 3 = 27	10 ⋈ 3 = 30
7 ⋈ 4 = 28	8 ⋈ 4 = 32	9 ⋈ 4 = 36	10 ⋈ 4 = 40
7 ⋈ 5 = 35	8 ⋈ 5 = 40	9 ⋈ 5 = 45	10 ⋈ 5 = 50
7 ⋈ 6 = 42	8 ⋈ 6 = 48	9 ⋈ 6 = 54	10 ⋈ 6 = 60
7 ⋈ 7 = 49	8 ⋈ 7 = 56	9 ⋈ 7 = 63	10 ⋈ 7 = 70
7 ⋈ 8 = 56	8 ⋈ 8 = 64	9 ⋈ 8 = 72	10 ⋈ 8 = 80
7 ⋈ 9 = 63	8 ⋈ 9 = 72	9 ⋈ 9 = 81	10 ⋈ 9 = 90

Sit itaque numerus 38476 per 35 multiplicandus : numeros ſub invicem ità ſcribe ; & dic quinquies 6 ſunt 30, ſcribe o ſub 5 & retentis 3, dic quinquies 7 ſunt 35, additis 3 quæ retinueras, prodeunt 38, pone 8 propè o, dicque porrò, quinquies 4 dant 20, additis 3, quæ retinueras, proveniunt 23 : ſcribe itaque 3 propè 8, & dic, quinquies 8 dant 40, additis 2, fiunt 42, pone 2 juxtà 3, dicque denuò, quinquies 3 ſunt 15, additis 4 prodeunt 19 : colloca 19 juxtà 2, quo facto, numerus ſuperior quinquies ſumptus eſt.

```
 38476
    35
------
192380
115428
------
1346660
```

Simili modo procede cum 3, alterâ multiplicatoris notâ : dic igitur, ter 6 dant 18, ſcribe 8, non ſub 5, ſed uno ulterius loco versùs ſiniſtram, quoniam decades multiplicas ; & retento 1, dic, ter 7 dant 21, addito 1, fiunt 22 : ſcribe 2 propè 8, ſicque deinceps.

Tandem ſi duas iſtas ſeries addideris, ſumma 1346660 erit productum quæſitum.

SCHOLION I.

20. *Si in numero multiplicando occurrat* zero, *apponenda est producto, in ordine huic* zero *correspondente, cyphra ex multiplicatione præcedente retenta, si verò nihil ex ipsâ retentum fuerit, solummodò scribendum erit* 0 *in prædicto ordine.*

SCHOLION II.

21. *Si* zero *notis multiplicatoris immixtum reperiatur, negligi potest, sed tunc series subsequens duobus versùs sinistram locis promovenda est.*

SCHOLION III.

22. *Si numerus quispiam multiplicandus proponatur, vel per* 10, *vel per* 100, *vel per* 1000, *numero multiplicando tot addantur* zero *versùs dextram, quot occurrunt in multiplicatore, & absoluta erit multiplicatio* (3).

SCHOLION IV.

23. *Si factoribus in fine adhæreant cyphræ* 0, *has omittere potes & circà characteres positivos brevitatis causâ operari: sed producto invento easdem adjunges.*

24. *Probatio multiplicationis fit per divisionem. Verum cum ultima hæc operatio multiplicatione multò extet difficilior, congruentiùs videtur, si multiplicatio aliâ repetatur ratione, assumendo scilicet pro multiplicatore numerum priùs multiplicandum, & vice versâ: tuncque, si productum secundum primo æquale fuerit, legitimè facta operatio concludenda est.*

DEMONSTRATIO MULTIPLICATIONIS.

25. Regula præscribit ut in singulos multiplicandi characteres ducatur multiplicator: consequenter si hæc observetur regula, productum invenietur unitatum, decàdum &c. Ergò & invenietur productum integri multiplicandi per multiplicatorem; quod erat demonstrandum.

26. *Ut facilius intelligatis quibus in casibus adhibenda multiplicatio, nonnulla hìc subjicio exempla.*

I.

Modium vini continet 288 *pintas, si* 8 *assibus vendatur pinta, quantùm producet integri modii venditio? Multiplica* 8 *per* 288, *vel potiùs majoris facilitatis causâ* 288 *per* 8 *reperies* 2304 *asses.*

II.

Dies quælibet 24 *horas comprehendit, quot comprehendet annus? Multiplica* 365 *per* 24.

III.

Emendi sunt pro exercitu 5460 *equi: quilibet equus constabit* 386 *lib. quænam erit summa totalis? Multiplica* 5460 *per* 386: *reperies* 2107560 *lib.*

27. *Ad hoc præterea inservit multiplicatio, ut fiat reductio specierum majorum ad minores. Eam ob rem multiplicandus est majorum specierum numerus per alium qui indicet quoties minor species in majore contineatur. Si igitur* 54 *pedes, v. g. in pollices convertere volueris, multiplica* 54 *per* 12; *quia pes* 12 *continet pollices: si noscere velis quot asses contineat summa quædam determinata librarum, hanc summam multiplica per* 20 *&c.*

SCHOLION.

Numerorum heterogeneorum multiplicationem hìc prætermitto, de ea alibi dicturus. Cùm enim divisio manum huic multiplicationi præbeat, videtur ipsa post divisionem congruentiùs exponenda.

DE DIVISIONE.

DEFINITIO IV.

28. Divisio est operatio, quâ quæritur & invenitur numerus aliquis, quotum intelligo, qui indicat quoties in dividendo contineatur divisor.

OBSERVATIO I.

Tria sunt in divisione distinguenda, scilicet *dividendus, divisor* & *quotus*. Dividendus est numerus qui dividi debet: divisor ille est, per quem fit divisio: quotus demùm qui denotat quoties divisor in dividendo contineatur.

II.

Divisio, alia simplex, alia composita, alia complexa: simplex si divisor unico constet charactere, composita, si pluribus: complexa verò, si terminorum cognitorum uterque, vel alteruter heterogeneus fuerit. De his sigillatim.

PROBLEMA IV.

29. *Numerum homogeneum per alium simplicem dividere.*

RESOLUTIO.

1°. Scribatur divisor dextram versùs prepè dividendum, aliquâ separatione per lineam factâ, eique linea altera subducatur. Investigetur porrò quoties divisor in sinistimâ dividendi notâ, vel, si

minor fuerit prima illa nota, in duabus finiſtimis contineatur : numerus id indicans ponatur ſub diviſore infrà lineam : ibi enim locus eſt quoti.

2°. Diviſor per hunc quotum partialem multiplicetur, & productum è ſiniſtimâ, vel è duabus ſiniſtimis dividendi notis, (ſi ipſæ aſſumptæ fuerint) ſubtrahatur, reſiduumque ſubſcribatur, vel, ſi nullum extet reſiduum, ſubſcribatur o.

3°. Si plures ſint dividendi notæ, ea quæ verſùs dextram ſubſequitur, directè infrà ſemetipſam demittatur, & propè reſiduum, ſi quod extiterit, ſcribatur, vel aliàs propè o : quæratur denuò quoties diviſor contineatur in ejuſmodi notâ ſolitariè ſumptâ, vel ſumptâ conjunctim cum reſiduo, ſi quod ſuperfuerit. Numerus id deſignans ponatur in quoto propè alium quotum partialem, & reliqua peragantur ut anteà ; hoc ſolùm obſervato, quod ſi diviſor in dividendo partiali non contineatur, in quoto ponatur o.

4°. Si operatio hæc circà ſingulas dividendi notas continuetur, invenietur quotus.

EXEMPLUM I.

Sit numerus 94016 dividendus per 4.

1°. Poſt dividendum, ſeparatione tamen factâ, pone diviſorem 4 : tum lineâ huic diviſori ſubductâ, dic, 4 in 9 bis continetur. Pone 2 in quoto ſub diviſore, & dic, bis 4 ſunt 8 ; ſublatis 8 ex 9 manet 1, ſcribe 1 ſub 9.

2°. Pergens ad	94016	4
ſequentem dividendi	14	———
notam, eam dimitte	20	23504
propè reſiduum 1,	01	
dicque porrò, 4 in	16	
14 continetur ter,	0	

ſcribe 3 in quoto poſt 2, & dic, ter 4 ſunt 12, demptis 12 ex 14, relinquuntur 2, quæ ſubſcribis.

3°. Demittens ſubſequentem cyphram o, dic, 4 in 20 continetur quinquies : pone 5 in quoto, & dic, quinquies 4 dant 20 : ſubſtractis 20 ex 20, reſtat nihil ſeu o, quod ſubſcribitur.

4°. Demittens 1, quæris quoties 4 in 1 continetur cumque nequidem ſemel contineatur, ponis o in quoto, dicíſque, o multiplicans 4, dat nihil ſeu o, ſi igitur ſubtrahis o ex 1, ſemper ſupereſt 1, quod ſubſcribis.

5°. Tandem demittens 6 propè 1, dicis, 4 in 16 continetur quater : ponis 4 in quoto, & per 4 multiplicans diviſorem, productumque ſubtrahens ex 16, deprehendis reſtare nihil ſeu o, atque diviſio peracta eſt.

EXEMPLUM II.

Sit pariter numerus 3780269 dividendus per 7.

Omnibus, ut antè peractis, prodit quotus		
540038,	3780269	7
& remanent 3,	28	———
quod indicio eſt	0026	540038
numerum prædictum	59	
in 7 partes æquales	(3	

exactè dividi non poſſe, ſed remanere tres unitates dividendas per 7.

PROBLEMA V.

30. *Numerum homogeneum per alium compoſitum dividere.*

RESOLUTIO.

1°. Omnibus, ut ſuprà diſpoſitis, operare primùm ſuprà tot dividendi notas, quot ſunt in diviſore notæ, niſi ſiniſtimâ diviſoris nota eſſet major ſiniſtima dividendi tunc namque ſuper unâ inſuper dividendi notâ operatio facienda eſt.

2°. Inveſtiga igitur quoties ſiniſtima diviſoris nota in ſiniſtimâ dividendi contineatur ; vel, ſi hæc minor fuerit, in duabus ſiniſtimis.

3°. Per numerum inventum multiplica totum diviſorem, & productum, utpotè notabilius quàm in primo caſu, ſubſcribe notis, circà quas operaris, ut ità, facilius ſubſtractio peragatur.

4°. Si ſubſtractio fieri non poſſit, ſignum eſt quod numerus mox inventus aſſumi nequeat pro quoto : quamobrem eum unitate unâ, vel pluribus unitatibus minue, donec factum ex eo in diviſorem ſubtrahi poſſit : dum autem ſubſtractio fieri poterit, numerum inventum ſcribes in quoto, & ſubſtractio actu peragetur, reſiduumque ſubſcribetur.

5°. Propè reſiduum, ſi quod futurum eſt, demitte notam dividendi à dextris ſubſequentem, & reliqua ut anteà perage, donec ſigillatim ſinguli characteres demiſſi fuerint. Atque ità diviſio abſolvetur.

EXEMPLUM I.

Sit numerus 7940 dividendus per 32.

Quoniam diviſor ex	7940	32
duabus notis conſtat	64	———
& ſiniſtima ejus nota	154	248 + 4/32
non eſt major ſiniſtimâ	128	
dividendi, operare	260	
ſtatim ſuper duabus	256	
notis, dicque, 3 in	(4	
7 continetur bis :		

duc 2 in 32, prodeunt 64, quæ ſubſcribis ; cùm

autem productum hoc ex 79 subtrahi possit, scribe 2 in quoto, & substractione factâ, propè residuum 15 demitte subsequentem dividendi notam 4; dicque porrò, 3 in 15 continetur quinquies. Quia verò ducendo 5 in 32 emergit productum 160, quod ex 154 subtrahi nequit, non potes ponere 5 in quoto: quare numerum hunc unitate minuas, hoc est, pro 5 pone 4: tum multiplicans 32 per 4, habes productum 128, quo substracto ex 154, fit residuum 26 circà quod demittis 0. Dic demùm, 3 in 26 continetur octies: duc 8 in 32; erit productum 156, quod ex 260 subtrahi potest. Scribe igitur 8 in quoto, & factâ substractione, manebit residuum 4; quod indicio est numerum propositum in 32 partes exactè dividi non posse. Numerus igitur $248 + \frac{4}{32}$ erit quotus quæsitus.

EXEMPLUM II.

Sit pariter numerus 1756 dividendus per 46.

Cum sinistima	1756	46
divisoris nota sit	138	
major sinistimâ	376	$38 + \frac{8}{46}$
dividendi; non	368	
circà duas solùm	(8	

dividendi notas operatio primùm instituenda, sed circà tres, quæriturque statim, quoties 4 in 17 &c.

SCHOLION I.

Characterem, qui deprimitur, conveniens est obliquâ quâdam lineolâ in numero dividendo delere, ne characteres depressi cum sequentibus postmodum confundantur, prout contingere maximè posset, dum in numero dividendo plures sese subsequentur characteres æquales, seu ejusdem rationis.

SCHOLION II.

Si factâ substractione detegatur residuum esse majus divisore, aut ipsi æquale, signum est cyphram quoto appositam, aut aliquem ex præcedentibus minorem esse quam oporteat; quandoquidem divisor in membro, à quo mox facta est substractio, semel saltem contineatur magis, quàm per cyphram quoto appositam notatur.

SCHOLION III.

Cum ex quolibet divisionis membro resultet cyphra una, quoto apponenda, liquidum est tot futuras esse in quoto cyphras, quot sunt in divisione membra. Porrò facilè est quot futura sint membra detegere, si quidem tot sint, & unum insuper, quot supersunt in dividendo cyphræ post primum membrum.

SCHOLION IV.

Nusquam apponendus quoto numerus major quam 9; quia cum residuum post quamlibet subtractionem ocurrens, semper sit divisore minus, impossibile est ut hoc residuum depresso charactere auctum, decies divisorem contineat.

SCHOLION V.

31. *Per divisionem reducuntur species minores ad majores. Hæc autem reductio fit dividendo summam minorum specierum per numerum illum, qui exprimit quoties major species contineat minorem;* v. g. *ad convertendos denarios in asses, dividendus est denariorum numerus per 12; quia as continet 12 denarios, & quotus exprimet asses in summâ denariorum contentos.*

Ut magis explicetur prædictæ reductionis usus magisque divisionis innotescat utilitas, quædam hic subjicio exempla.

I.

Quot exapedas continent 720 pedes? Divide 720 per divisorem 6 denotantem quoties pes contineatur in exapedâ; quotus 120 indicat 120 exapedas in 720 pedibus contineri.

II.

Quot marcas continent 50 unciæ argenti? Divide 50 per 8, quia 8 denotat quot sint in marcâ unciæ: quotus 6 & residuum 2 indicant in 50 unciis 6 marcas reperiri + 2 uncias.

SCHOLION VI.

32. *Si in praxi dubitet quis utra operatio, an multiplicatio, an divisio adhibenda sit, ad id reperiendum, quod quæritur; regulam observet sequentem: adhibenda est multiplicatio, dum numerus quæsitus debet esse major numero cognito, adhibenda è contrario divisio, si numerus quæsitus cognito debeat esse minor. suppono multiplicatorem vel divisorem esse majorem unitate.*

Varii sunt casus, in quibus abbreviari & facilius peragi potest divisio. Quosdam accipite.

I.

Dùm divisor componitur ex unitate, quam plura subsequuntur *zero*, si tot, vel plura sint *zero* in fine dividendi, quot in divisore, tunc ut habeatur quotus, tot detrahenda sunt *zero* ex fine dividendi,

dividendi, quot sunt in divisore, ac residuum erit quotus divisionis : v. g. ad dividendum 2475000 per 1000, cum sint 3 *zero* in divisore, totidem detrahenda sunt in fine dividendi, residuum 2475 erit quotus.

VI.

33. Dum numerus quispiam proponitur dividendus per 2, accipienda est media pars cujuslibet characteris, incipiendo à sinistris, & absoluta erit operatio. Observa tamen quod, si numerus aliquis impar occurrat, rejicienda sit una ipsius unitas ad seriem subsequentem in quâ valebit 10.

V. g. Sit numerus 65207 dividendus per 2.

$$\begin{array}{l} 65207 \\ 32603 + \frac{1}{2} \end{array}$$

Potest adhiberi eadem methodus, dum numerus aliquis proponitur dividendus per 3 : sed loco mediæ partis, accipienda est tertia per cujusque characteris, prout videri potest in sequenti exemplo, ubi agitur de divisione numeri 98104 per 3.

$$\begin{array}{l} 98104 \\ 32701 + \frac{1}{3} \end{array}$$

COROLLARIUM.

34. Indè deducitur methodus brevissima convertendi asses in libellas : scilicet abscisâ ultimâ cyphrâ numeri asses denotantis versùs dextram, assume mediam partem numeri superstitis, incipiendo à primo charactere versùs lævam, & observando quod suprà notatum fuit casu secundo (33). Quod si sub finem operationis supersit una decas, ipsam scribe seorsim antè cyphram abscissam, & tunc habebis numerum assium superstitem.

Sint v. g. 617409 asses in libellas convertendi:	617409 asses 30870 l. 9 asses

abscindenda est ultima cyphra 9, quæ unitates denotat assium, & accipienda dimidia pars residui : dimidia hæc pars est 30870 : ideoque 617409 asses dant 30870 libellas, & 9 asses. Adduntur 9 asses propter characterem 9 abscissum.

35. *Examen divisionis fit multiplicando divisorem per quotum, aut vice versâ; debetque productum dividendo æquale esse. Porrò quotus non est semper numerus integer, licet dividendus & divisor sint tales : sæpè enim, peractâ circà ultimum dividendi membrum subtractione, aliquod habetur residuum : tunc quotus est numerus integer repertus + fractio aliqua, cujus numerator est residuum, & denominator est divisor. Hoc in casu ad examen instituendum multiplicandus est divisor per quotum partialem, seu per numeros quoti integros, addendumque producto residuum : summa dividendo æqualis futura est, si ritè fuerit operatio peracta.*

DEMONSTRATIO DIVISIONIS.

36. Dividere numerum unum per alium, est tertium aliquem investigare numerum, scilicet quotum, qui exprimat quoties divisor in dividendo contineatur : atqui observando regulas præscriptas talis detegitur numerus, seu quotus. Nam 1°. detegitur quoties divisor in primis characteribus numeri dividendi ipsi correspondentibus contineatur. 2°. Factis multiplicationibus & subtractionibus, invenitur residuum ex prioribus characteribus numeri dividendi, ità ut hoc residuum characteribus addatur sequentibus. 3°. Detegitur quoties divisor contineatur in his characteribus subsequentibus, simul & in residuo ex prioribus; sicque consequenter; ergò &c. Quod erat demonstrandum.

DE MULTIPLICATIONE NUMERORUM COMPLEXORUM.

37. Numeri complexi, prout dictum est, ii sunt qui variarum specierum quantitates continent; talis est numerus sequens, 40 lib. 15 asses 6 den. talis & ille, 26 exapedæ 4 pedes 10 pollices.

OBSERVATIO I.

38. Dum alicujus mercis pretium per multiplicationem inquiritur, semper spectandus est ut multiplicandus ille ex duobus numeris, qui quantitates continet similes producti quantitatibus : v. g. si investigetur pretium 12 ulnarum panni, supposito quod ulna veneat 15 libellis, & multiplicentur duo numeri 12 & 15, alius per alium, habendæ sunt 15 lib. ut multiplicandus, quia productum, quod inquiritur, exprimet libellas; alter verò numerus, 12 ulnæ, erit multiplicator.

OBSERVATIO II.

39. Quod multiplicatorem spectat, is semper concipiendus est instar numeri puri, id est, solas

unitates, vel unitatum partes significantis ; nullatenùs ideam unitatum applicando magnitudinibus specialibus & determinatis, quales sunt ulnæ, exapedæ, libellæ &c ; si enim in præcedenti exemplo, v. g. multiplicator 12 spectetur quatenùs ulnas significans multiplicatio erit inintelligibilis, quia ridiculum videtur libellas per ulnas multiplicare. Observatio hæc circà multiplicandum & multiplicatorem intelligi debet de numeris tam incomplexis quàm complexis.

PROBLEMA VII.

40. *Numerum complexum per alium complexum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1°. Reducendus est uterque numerus ad infimam speciem expressam.

2°. Numeri reducti multiplicandi sunt alius per alium.

3°. Dividendum est hujus multiplicationis productum per numerum illum qui exprimit quoties maxima species multiplicatoris minimam contineat & quotus erit productum quæsitum. Sed productum illud dumtaxat exprimet infimam speciem multiplicandi, id est, denarios, si multiplicandus in denarios reductus fuerit ; poterit, qui voluerit, hoc productum in asses, deindè in libellas ope divisionis convertere, modo suprà explicato. Hæc omnia exemplo liquida fient.

EXEMPLUM.

Quæritur quanti valeant 4 exapedæ 5 pedes 8 pollices, supposito quod exapeda valeat 3 lib. 2 asses 4 den. ad inveniendum hunc valorem, multiplicandæ sunt 3 lib. 2 asses 4 den. per 4 exapedas 5 pedes 8 pollices ; atque ut hæc peragatur multiplicatio, 1°. reduco 3 lib. 2 asses 4 den. ad infimam speciem, scilicet ad denarios ; summa est 748. Reduco pariter 4 exapedas 5 pedes 8 pollices ad minimam speciem, nimirùm ad pollices ; summa est 356. 2°. Has duas summas 748 & 356 multiplico aliam per aliam : productum est 266288. 3°. Hoc productum divido per 72, qui numerus indicat quoties exapeda contineat pollicem, & reperio 3698 in quoto, & residuum 32 dividendum per 72 ; itaque valor 4 exapedarum 5 pedum 8 pollicum sunt 3698 denarii & fractio $\frac{32}{72}$ quæ negligi potest, quia non æquivalet denario.

Si quis 3698 denarios in asses voluerit convertere, hanc summam dividat per 12, quia 12 denarii æquivalent assi, & inveniet 308 asses & 2 denarios residuos. Deindè, ut reperiat summam libellarum in 308 assibus contentarum, dividat 308 per 20 ; quod facilè fiet per methodum suprà explicatam, inveniet 15 lib. 8 ass. itaque 4 exapedæ 5 pedes 8 pollices, in suppositione prædictâ, valent 15 lib. 8 ass. 2 den. cum fractione $\frac{32}{72}$ quæ aliquot solùm significat denarii partes.

SCHOLION.

41. *Facilior est multiplicatio, ubi duorum numerorum multiplicandorum alter est incomplexus : supponamus, v. g. quod quæratur pretium 35 exapedarum in hypothesi quod exapeda valeat 4 lib. 2 ass. 6 den. multiplica successivè 4 lib. 2 ass. 6 den. per 35, productum erit 140 lib. 70 ass. 210 den. poteris autem postmodum denarios & asses in libellas convertere sicut in problemate superiore atque reperies 144 lib. 7 ass. 6 den. quæ summa est pretium inquisitum.*

Cæterum, in aliis etiam casibus, breviùs peragi potest multiplicatio : nimirùm, omissâ factorum ad speciem infimam reductione, multiplicatur 1° integer multiplicandus per primam multiplicatoris speciem, ut mox dictum est ; deindè ut habeatur productum cæterarum multiplicatoris specierum, accipitur pars multiplicandi eandem habens, cum integro multiplicando relationem, ac characteres 2æ speciei multiplicatoris habent cum unitate 1æ speciei : si 3a occurrat species ; examinatur relatio occurrens inter 3æ & 2æ speciei characteres, & sumitur pars 2i producti eandem habens cum hoc producto relationem. Res illustratur exemplo : quæritur pretium 6 exapedarum, 2 pedum & 6 pollicum ex hypotesi quod exapeda constet 24 lib. 12 ass. 6 den.

Terminis dispositis ut moris est, multiplico 1° integrum multiplicandum per primam speciem multiplicatoris seu 8 exap. & productum est

24 lib.	12 ass.	6 den.
8 ex.	2 ped.	6 pol.
192	96	48
8	4	2
2	1	$\frac{2}{4}$
207	5	$2\frac{2}{4}$

192 lib. 96 ass. 48 den. deindè animadverto characteres 2æ speciei multiplicatoris, nempè duos pedes esse 3am partem unitatis 1æ speciei seu unius

exapedæ ; quapropter eorum productum debet esse 3^a *pars producti unius exapedæ, sc.* 8 *lib.* 4 *ass.* 2 *den. demùm observo* 6 *pollices esse* 4^{am} *partem* 2 *pedum ; quare eorum productum debet esse* 4^a *pars producti* 2 *pedum ; seu* 2 *lib.* 1 *ass.* $\frac{2}{4}$ *den. Hæ summæ particulares additæ dant productum quæsitum nempè* 207 *lib.* 5 *ass.* $2+\frac{2}{4}$ *den.*

DE DIVISIONE COMPLEXA.

PROBLEMA VIII.

42. *Numerum complexum per alium complexum dividere.*

RESOLUTIO.

1°. Reduc divisorem ad infimam speciem expressam.

2°. Fac divisionem incipiendo à majoribus dividendi speciebus, & progrediendo consequenter ad minores.

3°. Multiplica integrum quotum per numerum indicantem quoties maxima divisoris species minimam continet.

OBSERVATIO.

43. Si quod extet residuum post maximæ speciei divisionem, v. g. si supersint libellæ, convertendum est hoc residuum in asses ; atque asses ex hac conversione seu reductione provenientes addendi sunt iis, qui jam in dividendo reperiebantur, ut hæc deindè summa dividatur per divisorem illum, qui inserviit libellarum divisioni : pari ratione si, peractâ assium divisione, aliquod extiterit residuum, ipsum convertendum est in denarios, qui denariis in dividendo occurrentibus addendi sunt. Omnia hæc per exemplum aliquod facilè intelligentur.

EXEMPLUM.

7 marcæ 2 unciæ argenti constiterunt 346 lib. 18 ass. 6 den. quæritur pretium unius marcæ. Ostendit quæstionis status pretium istud investigandum esse dividendo 346 lib. 18 ass. 6 den. sic igitur procedo.

1°. Totum divisorem 7 marc. 2 unc. reduco ad 58 uncias, multiplicando 7 marcas per 8, quia marca continet 8 uncias, & addendo multiplicationis producto 2 uncias, quæ sunt in numero dividendo.

2°. Divido 346 lib. 18 ass. 6 den. per 58, incipiendo à libellis & reperio in quoto 5 lib. & residuum 56, quod in asses converto ipsum multiplicando per 20 : productum est 1120, cui addendi sunt 18 asses numeri dividendi ; erit igitur assium summa 1138, quam divido per 58 ; reperio in quoto 19 ass. & residuum 36 quod reduco in 432 den. quibus si addantur 6 den. in numero dividendo occurrentes, summa est 438 : divido rursùs hanc summam per 58, & reperio in quoto 7 den. & fractionem $\frac{32}{58}$ quæ negligi potest. Quotus igitur integer est 5 lib. 19 ass. 7 den. neglectâ exiguâ fractione quæ nonnisi partes exprimit denariorum.

3°. Integrum hunc quotum multiplico per 8, quia marca continet 8 uncias, productum est 47 lib. 16 ass. 8 den. quod productum dat pretium quæsitum.

Si divisor continuisset grossos, multiplicandus fuisset quotus per 64, quia marca 64 grossos continet.

44. Ubi divisor est numerus incomplexus, primus & tertius primæ methodi articuli locum non habent. Exemplum accipite : 26 modia vini constiterunt 1467 lib. 12 ass. 8 den. quæritur unius modii pretium. Dividantur per 26, libellæ, deindè asses, ac demùm denarii numeri dividendi & reperientur 56 lib. 8 ass. 11 den. + 10 denarii per 26 dividendi, pro cujuslibet modii pretio.

DE QUANTITATUM POTENTIIS ET RADICIBUS.

DEFINITIONES.

45. Quantitatis seu magnitudinis alicujus potentia est productum hujus magnitudinis multiplicatæ per unitatem aut per seipsam semel, bis, ter &c. Indè 1^a potentia, 2^a, 3^a &c.

46. Prima alicujus magnitudinis potentia est productum ejusdem magnitudinis per unitatem multiplicatæ : ex quo sequitur primam quantitatis potentiam esse ipsammet quantitatem ; quia productum unius magnitudinis per unitatem non differt ab ipsâ magnitudine. Prima igitur potentia numeri 3 est 3.

47. 2^a potentia, quæ communiùs dicitur *quadratum*, est productum unius magnitudinis

per seipsam : v. g. 9 est quadratum numeri 3, quia 9 est productum numeri 3 per 3. 16 est quadratum numeri 4, quia 16 est productum numeri 4 per 4.

48. 3^a potentia, quæ ordinariè vocatur *cubus*, est productum $2^{æ}$ potentiæ per primam multiplicatæ. Quarta potentia est productum tertiæ per primam. Quinta est productum quartæ per primam &c. adsunt exempla. Tertia potentia, sive cubus numeri 3 est 27, quia numerus 27 est productum potentiæ secundæ 9 per primam 3. Quarta potentia numeri 3 est 81, quia 81 est productum numeri 27 per 3, &c.

SCHOLION.

49. *Nulla potentia numeri 1 differt à primâ ejusdem potentia : igitur quadratum numeri 1 est 1, cubus est 1, quarta potentia est 1, & sic consequenter. Id ex eo provenit ; quod multiplicando 1 per 1 productum sit semper 1.*

50. Magnitudo quæ multiplicari debet per unitatem aut per seipsam ut habeantur variæ ipsius potentiæ, vocatur *radix* harum potentiarum. Igitur radix alicujus numeri est numerus ille, vel, qui per seipsum multiplicatus produxit secundam potentiam, vel qui multiplicando secundam produxit tertiam, & sic deinceps.

51. Radix varias habet denominationes pro diversitate potentiarum, quarum est radix. Radix primæ potentiæ dicitur radix prima ; radix secundæ, secunda & communiùs quadrata ; radix tertiæ, tertia & sæpius cubica &c.

COROLLARIUM I.

Hinc radix quadrata est numerus, qui per seipsum multiplicatus produxit secundam potentiam, v. g. 4 est radix quadrata numeri 16.

COROLLARIUM II.

Hinc radix cubica est numerus, qui multiplicando secundam potentiam, cujus est radix quadrata, produxit tertiam potentiam, v. g. 4 est radix cubica numeri 64, quia si multiplicet suum quadratum 16, aderit productum 64.

COROLLARIUM III.

Hinc radicem alicujus numeri, sive quadratam, sive cubicam extrahere, est detegere numerum, vel qui per seipsum multiplicatus produxit quadratum, vel qui multiplicando quadratum, produxit cubum. Ex quibus intelliges tot esse radices, radicumque extractiones, quot sunt diversæ numerorum potentiæ. Hic solummodo de extractione radicis quadratæ sermonem habebimus, quia ipsâ solâ postmodum indigebimus.

DE EXTRACTIONE RADICIS QUADRATÆ.

52. Ex eo quod numerus quadratus sit productum natum ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum, colligi facilè potest multos esse numeros minimè quadratos ; quia nimirùm multi sunt numeri qui nasci nequeunt ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum : tales sunt 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 &c. Dum igitur aliquis proponitur numerus cujus extrahenda sit radix quadrata ; sensus est detegendum esse numerum, qui per seipsum multiplicatus, aut produxit numerum propositum, si hic reipsâ sit quadratus, aut saltem produxit numerum quadratum, qui sit immediatè minor numero proposito.

Ut autem faciliùs extrahantur radices quadratæ numerorum quorumlibet finitorum, cognoscendi sunt omnes numeri quadrati, quorum radices unico exprimuntur charactere. Id exhibet schema sequens.

Numeri quadrati.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100.

Radices.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Ex hoc schemate intelligitur 1°. 1 esse quadratum, cujus radix est etiam 1 ; numerum 4 esse quadratum, cujus radix est 2 & sic deinceps. 2°. Quemlibet numerum duobus tantum characteribus expressum habere pro radice numerum unico expressum charactere. Undè si numerus aliquis tribus aut quatuor characteribus exprimatur, habebit pro radice numerum duobus tantum characteribus expressum & sic consequenter.

PROBLEMA IX.

53. *È numero dato radicem quadratam extrahere.*

RESOLUTIO.

1°. Numerus datus per dualitates distribuatur,

interjectis virgulis, incipiendo à dextrâ : hæ dualitates vocantur *sectiones* aut *classes* (Gallicè *tranches.*)

2°. Quærendum est majus quadratum contentum in primâ sectione versus lævam : hoc verò quadratum nequit esse majus quadrato numeri 9, quia quadratum numeri 10 tres continet characteres.

3°. Assumenda radix hujus quadrati, scribendaque ad dextram numeri propositi.

4°. Subtrahendum est à primâ sectione quadratum majus in eâ contentum, residuumque subscribendum.

Sit v. g. Numerus 209254 cujus quæritur radix quadrata. Factâ distributione per classes.

```
20, 92, 54   { 45
   492       {  —
  -----      {  8
   425
   ---
    67
```

1°. Quæro quodnam sit quadratum majus contentum in 20, (quæ est prima sectio versus lævam) reperio 16. 2°. Assumo ejusdem numeri 16 radicem 4, quam scribo ad dextram numeri propositi. 3°. Subtraho quadratum 16 à primâ sectione & subscribo residuum 4. Peractis tribus his operationibus applicandæ sunt secundæ sectioni regulæ sequentes.

1°. Demittenda est secunda hæc sectio circa residuum primæ, ponendumque punctum sub primo charactere sectionis demissæ, ut ostendatur hunc characterem adjunctum residuo primæ sectionis esse numerum dividendum : in exemplo proposito demitto secundam sectionem 92 juxtà 4 residuum primæ, & appono punctum sub primâ cyphrâ 9, ut indicem dividendum esse 49.

2°. Assumendum pro divisore duplum radicis jam inventæ scribendumque illud duplum sub istâ radice; in exemplo nostro cum radix inventa sit 4, 8 erit divisor, scribo igitur 8 sub 4.

3°. Facienda est divisio, observando quod licet cyphra ex hâc divisione orta bona sit secundum divisionem, non ideò apponenda sit radici, nisi etiam valeat secundum probationem extractioni radicis quadratæ propriam. Porrò hæc probatio ita peragitur : scribenda est cyphra prædicta immediatè post divisorem, quasi foret illius pars, & multiplicandus per eandem cyphram divisor sic auctus : si summa ex hâc multiplicatione proveniens possit subtrahi ex secundâ sectione adjunctâ residuo primæ, signum est quod cyphra probata bona sit; quo casu scribenda erit juxtà radicem jam inventam : verum si summa ex prædictâ multiplicatione orta subtrahi nequeat ex secundâ sectione junctâ residuo primæ; tunc cyphra probata unitate minuenda erit, & probatio rursùs peragenda erit cum novâ hâc cyphrâ, & si adhuc major extiterit summa, rursùs minuetur cyphra probata, donec subtractio fieri valeat.

In exemplo nostro divido 49 per 8 & detego 6 valere secundum divisionem, quia multiplicando 8 per 6, productum 48 subtrahi potest ex dividendo 49. Tum perago probationem pro radice quadratâ, id est, scribo 6 post divisorem 8, & habeo 86; deindè multiplico 86 per 6, productum est 516, quæ summa subtrahi nequit ex 492 : consequenter 6 minimè conveniens est. Itaque probo 5, ipsum scribendo post divisorem 8, quod dat 85, & multiplicando 85 per 5, productum est 425, quæ summa cum subtrahi possit ex 492; scribo 5 propè 4 in loco radici destinato.

4°. Scripto in radice charactere probato peragenda est subtractio; in exemplo citato subtraho 425 ex 492, & subscribo residuum 67.

54. Eodem modo operandum circa tertiam sectionem ac circa secundam : igitur demissâ tertiâ sectione juxtà residuum ultimæ subtractionis.

1°. Sub primâ tertiæ sectionis cyphrâ pono punctum aliquod, ut indicetur primam hanc cyphram residuo subtractionis adjunctam esse numerum dividendum.

2°. Assumo pro divisore duplum duarum cypharum, quæ jam in loco radici destinato collocatæ sunt, illudque duplum scribo sub primo divisore.

3°. Divisionem perago, adhibendo primùm probationem divisionis, & deindè probationem extractioni radicis quadratæ propriam.

4°. Invento charactere radici apponendo, subtractio peragenda est. Eâdem quoque ratione operandum foret circa sequentes sectiones, si quæ essent.

In exemplo proposito demitto tertiam sectionem juxtà 67, præcedentis subtractionis residuum : habeo 6754 : deindè posito puncto sub 5. 1°. Assumo pro divisore

```
20, 29, 54   { 457
   492       {   8
   425          90
  ----
  6754
  6349
  ----
   405
```

duplum numerorum jam radici appositorum, hoc est, duplum numeri 45, & scribo secundum divisorem 90 sub primo. 2°. Divido numerum dividendum 675 per 90, & detego 7 valere secundum divisionem, quia 630 productum divisoris 90 per 7 minus est quàm 675 : deindè ut videam

an valeat secundum probationem extractioni radicis quadratæ propriam, procedo ut suprà, & invenio summam 6349, quæ minor est quàm ista 6754, itaque 7 valet, ipsumque appono radici. 3°. Demùm subtraho 6349 ex 6754, supersunt 405. Cùm sectio nulla supersit demittenda, operatio absoluta est.

SCHOLION I.

Si nullum foret residuum post aliquam subtractionem, tunc sectio sequens sola esset membrum, circa quod operandum foret.

SCHOLION II.

Si divisor dividendo major esset aut si nulla ex cyphris positivis conveniens reperiretur factâ probatione extractioni radicis propriâ, tunc esset radici, apponendum zero : quo casu transeundum erit ad sectionem sequentem, quasi vera radix inventa fuisset, factæque essent multiplicationes & subtractiones.

SCHOLION III.

Quandò quadratum non est perfectum, semper aliquid remanet; undè ut quod remanet sensibilem non producat errorem, consultius erit datam quantitatem reducere ad denominationem inferiorem, v. g. *ad pedes, pollices; aut etiam lineas.*

55. Si dignoscere volueris, an ritè fuerit operatio peracta, numerum in radice repertum quadra, hoc est, investiga hujus numeri quadratum, huicque quadrato adde ultimæ subtractionis residuum. Igitur in prædicto exemplo quadra 457, illud multiplicando per seipsum, quadratoque 208849 adde residuum 405; cumque summa æqualis sit numero proposito, 209254, signum est operationem ritè peractam fuisse. Ubi post ultimam subtractionem nullum occurrit residuum, oportet ut quadratum numeri inventi numero proposito æquale sit; secùs illegitima operatio censenda est.

TRACTATUS SECUNDUS.

DE ALGEBRA.

UBI ETIAM DE RATIONIBUS, PROPORTIONIBUS, ÆQUATIONIBUS &c.

1. *Algebra est computatio, in quâ, loco characterum vulgarium, litteræ adhibentur alphabeti. Scientia hæc omni præconio est major : tanta enim est ejus utilitas ut omnibus penè Matheseos partibus inserviat, tanta ejus sublimitas, ut hominem ad eorum cognitionem ducat, quæ mortali cuivis impervia credideris. Sterilia, fateor, primùm videntur Algebræ principia; in iis si quidem usurpantur litteræ alphabeticæ, quarum vaga & indeterminata significatio nullum menti exhibet objectum determinatum, ideòque à nonnullis spectari posset calculus algebraïcus, ceu ludus quidam puerilis, nullam ad objecta cognitionum nostrarum relationem dicens. Verùm ex vagâ illâ significatione, vel potissimùm Algebræ commendatur utilitas : quia enim litteræ nihil significant determinatum, ideò cuilibet applicari possunt magnitudini; ex quo fit ut ope æquationum, quarum propèmodum magicus est usus, omnigena solvi possint problemata, quorum solutio aliàs impossibilis videretur. Quare, ut inamœnus vester in ediscendis primis Algebræ principiis labor postmodùm compensetur atque ejusdem scientiæ percipiatis utilitatem, circà hujus tractatûs finem mirandam æquationum artem, quæ quidem sensato cuilibet non arridere non potest, vobis exponere conabor.*

2. *Circà litteras alphabeti eædem per Algebram fiunt operationes, quæ per Arithmeticam circà numeros, scilicet additio, subtractio, multiplicatio & divisio. Antequam has expendamus operationes, recolendum quod suprà in Matheseos prælimінaribus circà varia Mathematicorum signa diximus, exponendumque quod terminos in Algebra adhiberi solitos spectat.*

DEFINITIO I.

3. Litteræ, circa quas operatur Algebrista, dicuntur quantitates algebraïcæ : porrò quantitas algebraïca vocatur *simplex* vel *incomplexa* si sola fuerit, ità ut plures non contineat partes signis + vel − separatas. Igitur + a, + $5ab$, & − $4aa$ sunt tres quantitates incomplexæ.

DEFINITIO II.

4. Quantitas algebraïca dicitur *composita*, *complexa*, aut *polynomia*, dum plures continet partes prædictis signis + vel − separatas : itaque $a - b$, $c - d + f$ quantitates sunt complexæ.

DEFINITIO III.

5. In quantitatibus complexis, partes prædictis signis separatæ dicuntur *termini*; quamobrem in quantitate $ab - cd - bd$, tres occurrunt termini; scilicet ab, cd, & bd.

DEFINITIO IV.

6. Quantitates complexæ duos solùm terminos includentes, vocantur *binomiæ*; si tres complectantur, *trinomiæ* &c. Igitur $a + b$ est binomium, & $ab + cd - bd$ est trinomium.

DEFINITIO V.

7. Quantitates sive complexæ, sive incomplexæ, quibus præfigitur signum + dicunrur *positivæ*; quantitates verò quibus præfigitur signum − vocantur *negativæ*.

SCHOLION I.

8. *Dum in quantitate complexâ plures sese subsequuntur termini negativi, ille aut illi qui occurrunt post primum ex his terminis negativis, valorem hujus primi non minuunt : v. g. hæc quantitas* $+12 - 5 - 3$, *non indicat esse dumtaxat abscindendum* $5 - 3$, *id est*, 2 *ex* 12; *sed è contrà abscindendos esse ex* 12 *ambos numeros* 5 & 3 : *igitur* $+12 - 5 - 3$ *valet* 4. *Idem dicendum de quantitatibus algebraïcis si plures comprehendant terminos negativos sese subsequentes, ideòque indifferens est ut termini sive hoc sive isto modo disponantur; itaque* $a + b - c - d$, *idem est* ac $a - c + b - d$.

SCHOLION II.

9. *Quantitates incomplexæ, quibus nullum præfigitur signum, supponuntur habere signum +, ac consequenter sunt positivæ. Idem dicendum de primo quantitatum complexarum termino. Igitur* ab *idem est* ac + ab. *Similiter* $ab + cd - bd$, *idem est* ac $+ ab + cd$ b $- d$

DEFINITIO VI.

10. Dùm inter se comparantur duæ quantitates æquales interposito signo =, hoc vocatur *æquatio* vel *æqualitas* : v. g. $a + b = c$ est æquatio. Duæ quantitates, quæ comparantur, dicuntur *membra æquationis* : quantitas, quæ occurrit ad lævam signi æqualitatis est *primum membrum*, quæ verò ad dextram, est *secundum*. Sic in æquatione $a + b = c$ primum membrum est $a + b$, secundum verò est c.

DEFINITIO VII.

11. Numeri litteris præfixi dicuntur *coefficientes* : igitur 3 est coefficiens quantitatis $3ab$. Dùm quantitas incomplexa, vel aliquis terminus quantitatis complexæ coefficientem non habet expressum, pro coefficiente unitatem habere censetur : v. g. in quantitate $5ab + cd$ unitas est coefficiens ultimi termini cd.

DEFINITIO VIII.

12. Quantitates eâdem litterâ vel iisdem litteris totidem vicibus scriptis designatæ *similes* aut *homogeneæ* dicuntur. Sic $3a$ & $2a$ sunt quantitates similes, sicut $4aab$ & $- 5aab$; non verò ab & ac, neque aab & ab.

SCHOLION.

13. *Dùm in computo algebraïco plures quantitates homogeneæ seu similes occurrunt, hæ in unam reducuntur, & unico exprimuntur termino ut brevior & clarior expressio fiat. Hæc autem reductio duplici ratione fieri potest, vel coefficientes addendo, vel unum coefficientem ab altero subtrahendo. Si quantitates homogeneæ iisdem afficiantur signis, ut fiat reductio, addendi sunt coefficientes, scribendaque summa cum signo terminorum reductorum. Sic in quantitate* $3abb + 4abb + 2ab$, *cum duo primi termini sint homogenei & eodem signo + affecti, addo coefficientes* 3 & 4, & *scribo summam* 7 *cum signo* + : *itaque quantitas reducta est* $+ 7abb + 2ab$, *vel* $7abb + 2ab$. *Similiter si reducere voluero tres terminos homogeneos hujus quantitatis* $5bb - 3bd - 4bd - bd$, *scribam* $5bb - 8bd$. (*Spectata est unitas ut coefficiens ultimi termini* (11). *Si quantitates homogeneæ diverso afficiantur signo, earum reductio fit coefficientem minorem è majore subtrahendo, & residuo signum majoris præfigendo* : v. g. *ut reducatur hæc quantitas* $- 3ab + 5ab + 7aa$, *cujus duo primi termini sunt homogenei, subtrahendum* 3 *ex* 5, *scribendumque* 2 *cum signo* +. *Quantitas igitur reducta erit* $+ 2ab + 7aa$. *Similiter ut*

reducatur iſta quantitas 3cx — 7xx + 5xx, *ſcribendum erit* 3cx — 2xx. *Quod ſi quantitates homogeneæ diverſis ſignis affectæ eoſdem habuerint coefficientes, quantitates illæ ſeſe invicem deſtruunt. Igitur* 3b — 3b = 0 : & 3cx — 5xx + 5xx = 3cx.

PROBLEMA I.

14. *Quantitates litterales addere.*

RESOLUTIO.

Quantitates iſtæ ſimpliciter jungantur cum ſignis ad ſingulas pertinentibus : v. g. adduntur a & b, ſcribendo $a + b$; adduntur a & a ſcribendo $a + a$ vel potiùs $2a$; adduntur $- b$ & a, ſcribendo $a - b$. Adduntur $c - d$ & $a + b$, ſcribendo $a + b + c - d$. Adduntur tandem $- 3aab + 2ad$ & $5aab - 7ad + 3cd$, ſcribendo $5aab - 7ad + 3cd - 3aab + 2ad$.

SCHOLION.

15. *Dum, additione peractâ, in ſummâ occurrunt quantitates homogeneæ, facienda eſt reductio* (13.) *Sic in ultimo exemplo propoſito ſumma reperta ad hanc reducitur* 2aab — 5ad + 3cd.

PROBLEMA II.

16. *Quantitatem unam algebraïcam ex aliâ ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

Mutanda ſunt ſigna quantitatis ſubtrahendæ, intactis ſignis quantitatis è quâ fit ſubtractio : v. g. ad ſubtrahendum b vel $+ b$ ex a, ſcribendum $a - b$: ſed ad ſubtrahendum $- b$ ex a, ſcribendum $a + b$. Ad ſubtrahendum $c - d$ ex $a + b$ ſcribetur $a + b - c + d$. Denique ad ſubtrahendum $- 3aab + 2ad$ ex $5aab - 7ad + 3cd$, ſcribitur $5aab - 7ad + 3cd + 3aab - 2ad$.

SCHOLION I.

17. *Ubi poſt ſubtractionem quantitates homogeneæ in reſiduo occurrunt, ipſæ reducendæ ſunt ad unicam expreſſionem* (13); *itaque in ultimo exemplo jam propoſito reſiduum occurrens reducitur ad* 8aab — 9ad + 3cd. *In praxi ſæpè fit reductio ſimul cum ſubtractione. Idem dic de additione.*

SCHOLION II.

18. *Facilè concipitur cur in quantitate ſubrahendâ mutetur ſignum* + *in* — ; v. g. *ſi ſubtrahendum ſit* b *ex* a, *evidens eſt reſiduum fore* a — b ; *ſed non ità facilè intelligitur cur mutetur ſignum* — *in* + ; v. g. *ſi ſubtrahendum ſit* — b *ex* a, & *ſcribatur* a + b *ſecundùm regulam præſcriptam, videtur præpoſterè facta operatio, quia* a + b *potiùs videtur ſumma quàm reſiduum. Ut hæc evaneſcat difficultas, & ratio reddatur regulæ in prædicto caſu, à numeris accipiamus exemplum : ſupponamus ſubtrahendum eſſe* 7 — 3 *ex* 12 : *dico ſcribendum eſſe* 12 — 7 + 3 : *ſi enim ſcribatur* 12 — 7, *evidens eſt nimium ſubtractum eſſe ex* 12, *quia ſubtrahendum non eſt* 7 *ex* 12, *ſed tantùm* 7 — 3, *quod minùs eſt quàm* 7 ; *conſequenter addendum eſt* 3, *hoc eſt, ſcribendum* 12 — 7 + 3 = 8.

PROBLEMA III.

19. *Quantitates algebraïcas incomplexas per invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Triplex in multiplicatione algebraïca obſervanda regula : 1ª. Spectat ſigna + & — quantitatibus per invicem multiplicandis præfixa : 2ª. Coefficientes : 3ª. Demùm litteras quibus deſignantur magnitudines.

20. I. Regula. Ubi multiplicandus & multiplicator ſimilibus afficiuntur ſignis ſive habuerint ambo ſignum +, ſive ambo ſignum —, producto apponendum + ; ubi è contrario diverſa ſunt ſigna illa, producto apponendum — : v. g. $+ a$ multiplicatum per $+ b$, ſive (brevitatis causâ) $+ a \bowtie + b$, dat $+ ab$. $+ a \bowtie - b$, dat $- ab$. $- a \bowtie - b$, dat $+ ab$.

21. II. Regula. Coefficientes quoque, inſtar numerorum multiplicandi ſunt per invicem; ſed recolendum quod ſuprà monuimus (11) unitatem cenſeri coefficientem qantitatis algebraïcæ, cui nullus præfigitur coefficiens : v. g. $+ 3a \bowtie + 2b$ dat $+ 6ab$. $- 4a \bowtie + b = - 4ab$. $+ 5a \bowtie + 4c = 20ac$.

22. III. Regula. Ad indicandum duas quantitates algebraïcas in ſe invicem ductas eſſe, ſine interpoſito ſigno ſimpliciter uniuntur ; ità productum litteræ a per b eſt ab, productum quantitatis ab per c eſt abc, productum denique quantitatis $aa \bowtie ac$ eſt $aaac$.

SCHOLION.

SCHOLION I.

23. *Pro* aa *brevitatis causâ scribitur* A^2, *pro* bbb *scribitur* B^3 *&c. numeri autem 2 & 3 exponentes dicuntur: Si litteram nullus sequatur numerus, unitas censetur esse ejus exponens. Notandum autem in hoc*, v. g. *producto* A^3B *numerum ternarium respicere quantitatem præcedentem* a, *non autem subsequentem* b.

SCHOLION II.

24. *Latum est discrimen inter coefficientem alicujus litteræ, & ejus exponentem*, v. g. *inter* 3a *&* A^3 *ut id manifestum fiat supponamus* a *significare* 4, *in hâc hypothesi* 3a *exprimet ter* 4, *id est*, 12, *ad verò* A^3 *exprimet* 64: *nam* aa *vel* $4 \bowtie 4$ *dat* 16 *consequenter si adhuc multiplicetur* aa *sive* 16 *per* a = 4, *productum* aaa *seu* A^3 *erit* 64.

SCHOLION III.

25. *Dum in multiplicando & multiplicatore occurrit eadem littera cum exponentibus vel æqualibus vel inæqualibus, tunc semel dumtaxat in producto scribitur hæc littera cum summâ exponentium v. g.* $A^2 \bowtie A^3 = A^5$: $A \bowtie A^3 = A^4$: $A^3B^4 \bowtie A^5B^2 = A^8B^6$. $4A^2 \bowtie 5AB^3 = 20A^3B^3$. *Cujus quidem hæc est ratio*: A^2 = aa & A^3 = aaa: *atqui* aa $\bowtie$ aaa = aaaaa *sive* A^5: *Ergò* $A^2 \bowtie A^3 = A^5$. *Exinde iterum patet statuendam esse differentiam inter coefficientes & exponentes, si quidem in multiplicatione coefficientes in se invicem ducuntur, exponentes verò solum adduntur.*

SCHOLION IV.

26. *Si littera quædam in seipsam ducatur, productum vocatur quadratum, cujus illa littera erit radix*: v. g. *si multiplicetur* a *per* a, *aderit quadratum* aa *vel* A^2 *cujus radix est* a. *Si multiplicetur quadratum* A^2 *per* a, *aderit cubus* A^3; *& sic consequenter. Applica litteris, proportione servatâ, quæ circa numeros diximus, ubi de potentiis & radicibus.*

27. Tertia regula, quæ litteras spectat, demonstrari non debet; quoniam methodus assignata (22) merè arbitraria est. Sed neque regula secunda demonstratione indiget, siquidem coefficientes, utpotè numeros, numerorum instar multiplicandos esse evidens sit. Igitur prima dumtaxat regula specialem exigit demonstrationem. Sed anteà observandum quòd regula ista sic enuntietur: $+ \bowtie +$ dat $+$: $+ \bowtie -$ vel $- \bowtie +$ dat $-$: denique $- \bowtie -$ dat $+$.

DEMONSTRATIO.

28. 1°. $+ \bowtie +$ dat $+$: hoc enim in casu multiplicator afficitur signo $+$ & per consequens multiplicatio viâ additionis peragitur, seu toties assumitur multiplicandus, quoties eum assumendum esse per multiplicatorem denotatur: aliundè multiplicandus, utpotè signo $+$ affectus, est quoque quantitas positiva: igitur multiplicando $+ \bowtie +$, additur seu pluries assumitur quantitas positiva, nimirum multiplicandus; ergo productum est summa quantitatum positivarum, ergò afficiatur signo $+$ necesse est. Ergò $+ \bowtie +$ dat plus.

29. 2°. $+ \bowtie -$ vel $- \bowtie +$ dat $-$ 1°. Quidem $+ \bowtie -$ dat $-$; etenim quoniam multiplicator habet signum $-$, multiplicatio fit viâ substractionis, id est, toties subtrahitur multiplicandus, quoties per multiplicatorem denotatur; consequenter mutandum est signum multiplicandi (16): Ergò cùm multiplicandus habeat signum $+$; productum habere debet signum $-$. 2°. $- \bowtie +$ dat $-$. Nam cùm multiplicator afficiatur signo $+$, multiplicandus autem signo $-$; additur, id est, pluries assumitur quantitas negativa, scilicet multiplicandus; igitur productum est summa quantitatum negativarum; ergò affici debet signo $-$.

30. 3°. Denique $- \bowtie -$ dat $+$: in hoc namque casu, cum multiplicator habeat signum $-$, toties subtrahitur multiplicandus, quoties per multiplicatorem indicatur; consequenter mutandum est signum multiplicandi (16) atqui multiplicandus signo $-$ afficitur; ergò productum affici debet signo $+$. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA IV.

31. *Quantitates algebraïcas complexas per invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Singuli termini unius quantitatis ducantur in singulos terminos alterius : interim observentur tres regulæ pro quantitatibus incomplexis præscriptæ (20, 21, & 22) peractisque his multiplicationibus, producta partialia addantur : summa erit productum quæsitum.

EXEMPLUM I.

Si multiplicare volueris $a - 3b$ per $2c - d$, scribendæ sunt hæ duæ quantitates, ita ut multiplicator sit sub multiplicando; deindè sub multiplicatore ducendâ linea : Quo peracto quantitatem multiplicandam $a - 3b$ multiplicabis :

$$\begin{array}{r} a - 3b \\ 2c - d \\ \hline 2ac - 6bc \\ -ad + 3bd \\ 2ac - 6bc - ad + 3bd \end{array}$$

1°. Per $2c$: productum erit $2ac - 6bc$: 2°. Per $-d$: productum erit $-ad + 3bd$: demùm duo hæc producta partialia addes ; summa $2ac - 6bc - ad + 3bd$ erit productum totale.

EXEMPLUM II.

$a + b$ multiplicandus.
$a - b$ multiplicator.

$A^2 + ab$ primum productum partiale.
$-ab - bb$ secundum productum partiale.

$A^2 - bb$ productum totale.
In ultimo exemplo duo termini $+ab$ & $-ab$ evanuerunt peractâ reductione.

PROBLEMA V.

32. *Quantitates algebraïcas incomplexas dividere.*

RESOLUTIO.

1°. Divisor dividendo subscribitur, & ab eo separatur exiguâ quâdam lineâ, juxtà quam collocatur signum æqualitatis versus dextram : ut divisionis quotus post prædictum signum scribatur.

2°. Tres observantur regulæ, quarum prima spectat signa + & − dividendi & divisoris, secunda coefficientes, tertia verò litteras.

I. Regula. Ubi dividendus & divisor iisdem afficiuntur signis, quoto apponendum est + ; ubi verò diversis, apponendum −.

II. Regula. Dividuntur coefficientes instar aliorum numerorum. Sed recolendum quod suprà exposuimus (11). V. g. si volueris dividere $12ab$ per $3a$, scribes 4 pro coefficiente quoti quia 3 in 12 continetur quater. Pariter $5ab$ divisum per a dat 5 pro coefficiente quoti, quia 1, quod est coefficiens divisoris, quinquies in 5 continetur.

III. Regula. Delendæ sunt litteræ dividendo & divisori communes ; quo peracto, quod superest in dividendo, est quotus divisionis, modo divisor sit omnimodè deletus. V. g. quotus quantitatis ab divisæ per a, est b, quia deleto a, quod est dividendo & divisori commune, superest b in dividendo. Pariter $A^5 B^2$ sive $aaaaabb$ divisum per $A^3 b$ sive $aaab$ dat in quoto aab. Quia deleto $A^3 b$ in dividendo restat aab. Ut hæc faciliùs capiatis, subministro vobis exempla, in quibus applicantur tres regulæ suprà-dictæ.

I. $\dfrac{+12A^2X}{+12a} = ax.$ II. $\dfrac{+20ab^3}{-4ab} = -5b^2.$

III. $\dfrac{-30adx}{+6ax} = -5d.$ IV. $\dfrac{-28a^4 b^5}{-7a^4 b^3} = 4b^2.$

SCHOLION I.

33. *Si dividendus & divisor forent una & eadem quantitas, quotus esset unitas.*

V. g. $\dfrac{a}{a} = 1.$ $\dfrac{a^3 b}{a^3 b} = 1.$ $\dfrac{-5a^2 b^4}{+5a^2 b^4} = -1.$

Ratio est quia omnis quantitas semel in seipsâ continetur.

SCHOLION II.

34. *Si suppressis litteris divisori & dividendo communibus quidpiam adhuc supersit in divisore, tunc exactè fieri nequit divisio ; sic* v. g. *dividi nequit* $a^2 b$ *per* ac, *neque* $a^3 b^4$ *per* $a^4 b$; *quia in divisore restat* c *in exemplo primo, &* a *in secundo. Hoc*

porrò in casu, solùm indicatur divisio, hoc modo: $\frac{a^2b}{ac}$ & $\frac{a^3b^4}{a^4b}$ *vel* $\frac{ab}{c}$ & $\frac{b^3}{a}$; *delendo litteras communes. Similiter si dividendus & divisor nullam haberent litteram communem, eadem ratione indicanda foret divisio.*

SCHOLION III.

35. *Ubi occurrit eadem littera in dividendo & divisore, tunc, ut divisio peragatur, subtrahitur exponens divisoris ab exponente dividendi.*

V. g. $\frac{A^5}{A^2} = A^{5-2} = A^3$. $\frac{A^3}{A} = A^{3-1} = A^2$.

SCHOLION IV.

36. *Secunda regula circà divisionem algebraïcam observanda nullam patitur difficultatem: cùm enim coefficientes sint numeri, circà ipsos operandum, prout fit in aliorum numerorum divisione. Tertia verò regula in eo fundatur quòd productum divisoris per quotum vel quoti per divisorem sit eadem magnitudo cum dividendo: nam multiplicatio quoti per divisorem fit scribendo divisorem juxtà quotum; & conquenter ut productum hujus multiplicationis à dividendo non differat, necesse est ut peragendo divisionem deleantur in quantitate dividendâ litteræ, quæ etiam in divisore occurrunt. Itaque prima dumtaxat regula demonstratione opus habet.*

DEMONSTRATIO.

37. Productum divisoris per quotum debet esse idem cum dividendo; nam juxtà notionem divisionis, quotus designat quoties diviso continetur in dividendo, consequenter toties assumendo divisorem quoties assumendum esse denotat quotus, resultare debet magnitudo æqualis dividendo. Atqui ut productum prædictum idem sit cum dividendo, necesse est observetur regula proposita: nam v. g. ubi dividendus afficitur signo + & divisor signo −, si quoto apponeretur +, evidens est quòd multiplicando divisorem, qui supponitur habere signum −, per quotum, qui haberet signum +, productum habere deberet −, quia − ⋈ + dat −: consequenter signum producti differret à signo dividendi; quòd est impossibile.

PROBLEMA VI.

Quantitates algebaïcas complexas dividere.

RESOLUTIO.

38. Duplex contingere potest casus; vel enim dividendus est complexus, divisor autem incomplexus, vel uterque est complexus. In primo casu sic operaberis.

1°. Divides primum dividendi terminum per divisorem, observando tres regulas pro quantitatum incomplexarum divisione statutas (32) tum seorsim quotum scribes.

2°. Divisorem multiplicabis per terminum in quoto mox scriptum.

3°. Productum ex multiplicatione ortum è dividendo subtrahes, mutando signum ejusdem producti.

4°. Denique reduces terminos homogeneos post substractionem occurrentes. Prædictas autem quatuor operationes, aliis quoque dividendi terminis successivè applicabis.

V. g. Sit quantitas $4a^5b^4 - 6a^3b^2 + 2a^2b^3$ dividenda per $2a^2b$.

Scripto divisore ad dextram dividendi, & ductâ lineâ sub utroque, ductâ quoque alia lineâ dividendum à divisore separante, prout hîc oculis exponitur.

$$\begin{array}{l|l} 4a^5b^4 - 6a^3b^2 + 2a^2b^3 & 2a^2b \\ \;\;\;\;0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \\ \hline -4a^5b^4 + 6a^3b^2 - 2a^2b^3 & 2a^3b^3 - 3ab + b^2 \\ \;\;\;\;0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 & \end{array}$$

1°. Divido primum dividendi terminum $4a^5b^4$ per divisorem $2a^2b$, quotus est $2a^3b^3$ scribo quotum hunc sub divisore. 2°. Quotum eundem duco in divisorem $2a^2b$, productum est $+4a^5b^4$ 3°. Hoc productum è dividendo subtraho scribens $-4a^5b^4$ sub termino homogeneo $4a^5b^4$ 4°. Reductionem perago, delendo duos terminos $4a^5b^4 - 4a^5b^4$, utpotè sese invicem destruentes (13) deleri igitur debebant hi termini; verùm ad majorem impressionis facilitatem ap-

poſitum fuit zero; quod æquivalet.

Deindè eodem modo operor circà ſecundum terminum $-6a^3b^2$ quantitatis dividendæ, & poſtmodum circà terminum $+2a^2b^3$. Diviſione abſolutâ, occurrit quotus totalis $2a^3b^3 - 3ab^2 + b$.

39. Ubi tam diviſor quàm dividendus eſt complexus, adhibentur eædem quatuor operationes circà primum dividendi membrum, & ſi poſt reductionem ſuperſint termini in dividendo non deleti, circà eos fiunt quoque eædem operationes, & ſic pergitur donec in dividendo nihil ſurperſit, ſi id fuerit poſſibile.

OBSERVATIO.

40. Peragendo primam è quatuor prædictis operationibus, ſcilicet diviſionem, utendum non eſt niſi primo diviſoris termino: at in ſecundâ operatione multiplicantur ſinguli diviſoris termini per eum qui quoto fuit appoſitus poſt peractam primam operationem, atque omnes termini producti è dividendo ſubtrahendi ſunt: omnia hæc per exemplum innoteſcent.

Sit v. g. quantitas $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ dividenda per $a^2 - 2ab + b^2$.

Diſpoſitis quantitatibus his ut in exemplo ſuperiore.

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & a^2 - 2ab + b^2 \\
\text{o} \quad\; \text{o} \qquad\; \text{o} \qquad \text{o} & \\
\hline
-a^3 + 2a^2b - ab^2 & a - b \\
\text{o} \quad\; \text{o} \qquad \text{o} & \\
-a^2b + 2ab^2, -b^3 & \\
\text{o} \qquad\; \text{o} & \\
+a^2b - 2ab^2 + b^3 & \\
\text{o} \qquad\; \text{o} \qquad \text{o} &
\end{array}$$

Divido ſtatim primum dividendi terminum a^3 per primum diviſoris terminum a^2 & ſcribo a in quoto. 2°. Diviſorem integrum per quotum a multiplico. 3°. E dividendo ſubtraho productum $a^3 - 2a^2b + ab^2$: quod fit mutando ſigna & ſcribendo $-a^3 + 2a^2b - ab^2$ ſub homogeneis dividendi terminis. 4°. Facio reductionem, quâ peractâ occurrit pro dividendi reſiduo $-a^2b + 2ab^2 - b^3$.

Circà hoc reſiduum eædem quatuor operationes peragendæ ſunt. Divido igitur, 1°. primum terminum $-a^2b$ per primum diviſoris terminum a^2 & ſcribo quotum $-b$ poſt terminum a jam in quoto collocatum. 2°. Diviſorem integrum multiplico per $-b$. 3°. Productum ſubtraho mutando ſigna & ſcribendo $+a^2b - 2ab^2 + b^3$ ſub terminis homogeneis. 4°. Reductione factâ nihil ſupereſt, & conſequenter abſoluta eſt diviſio.

SCHOLION.

41. *Si diviſio ſine reſiduo peragi nequeat, indicabitur præcisè diviſio, diviſorem dividendo ſubſcribendo* (34).

DE RATIONIBUS.

DEFINITIO.

42. Ratio, prout hîc ſumitur, eſt ordo ſeu comparatio duarum magnitudinum. Porrò duplici modo fieri poteſt comparatio illa, nimirùm expendendo quantum una alteram excedat aut ab eâ excedatur, vel quoties una alteram contineat: primus comparandi modus vocatur *ratio arithmetica*, ſecundus *ratio geometrica*.

COROLLARIUM I.

43. Ratio igitur arithmetica eſt duarum magnitudinum comparatio, in quâ ſpectatur quantùm una alteram excedat aut ab eâ excedatur: v. g. ſi ſpectem quòd exceſſus quantitatis 6 ad 2 ſit 4; comparatio hæc numerorum 6 & 2 eſt ratio arithmetica.

COROLLARIUM II.

44. Ratio geometrica eſt duarum quantitatum comparatio, in quâ ſpectatur modus quo una alteram continet: v. g. ſi conſiderem quòd 6 contineat 2 ter.

SCHOLION I.

45. *In omni ratione, tum arithmeticâ, tum geometricâ duo occurrunt termini, scilicet* antecedens & consequens : *antecedens, qui semper est primus rationis terminus, est qui ad alium refertur; consequens verò ille est ad quem refertur antecedens : in exemplo proposito 6 est antecedens, & 2 consequens.*

SCHOLION II.

46. *Per substractionem detegitur quantùm magnitudo una alteram excedat : atque ideò rationis arithmeticæ dignoscitur valor, subtrahendo consequentem ex antecedente, vel vice versâ : valor autem rationis geometricæ innotescit dividendo antecedentem per consequentem, ut postmodùm videbimus.*

SCHOLION III.

47. *Quandò de quâdam ratione sermo est, non determinando an de Arithmeticâ, an de Geometricâ agatur, semper intelligenda est ratio Geometrica. Idem putà de proportione, de quâ posteà.*

SCHOLION IV.

48. *Comparari potest magnitudo una cum aliâ ad dignoscendum an æqualis sit, an major, an minor. Ad hujus comparationis, & eorum quæ dicturi sumus intelligentiam, quædam tradendæ definitiones, & quædam exponenda principia.*

In quolibet toto duplicis generis distinguendæ sunt partes, *aliquotæ* scilicet & *aliquantæ.*

DEFINITIO I.

49. Partes aliquotæ sunt quæ quibusdam vicibus repetitæ totum suum exactè, id est, sine residuo metiuntur : v. g. 3 est pars aliquota numeri 12, quia 3 quater repetitum exactè metitur 12, seu quater exactè continetur in 12. Idem dic de numero 6 respectivè ad 30. Partes aliquotæ vocantur *submultiplæ*, & totum ipsum dicitur *multiplum* in ordine ad partes aliquotas : itaque 6 est sub-multiplum numeri 30, & 30 est multiplum quantitatis 6.

DEFINITIO II.

50. Partes aliquantæ eæ sunt quæ in toto suo exactè non continentur : v. g. 5 est pars aliquanta quantitatis 12, quia in 12 continetur bis cum residuo 2. Idem dic de magnitudine 8 respectivè ad 30.

SCHOLION.

51. *Dum comparantur partes sive aliquotæ sive aliquantæ alicujus totius cum partibus alterius, quædam, inter has partes, dicuntur* similes *seu* homogeneæ: *Partes verò similes eæ sunt quæ eodem modo in toto suo continentur : igitur 5 & 7 sunt partes similes quantitatem 15 & 21, quia 5 ter continetur in 15, quemadmodum 7 ter continetur in 21. Pariter 4 & 6 sunt partes similes quantitatum 10 & 15 : quia 4 toties in 10 continetur, quoties 6 in 15, scilicet bis cum semisse.*

PRINCIPIUM I.

53. Si duæ rationes æquæles fuerint alicui tertiæ, æquales sunt inter se. Pariter si ex pluribus rationibus prima æqualis sit secundæ, secunda tertiæ, tertia quartæ & sic consequenter, evidens est primam ultimæ æqualem esse.

PRINCIPIUM II.

53. Duæ magnitudines æquales eamdem habent relationem seu rationem ad tertiam aliquam magnitudinem : si *a* & *b* æqualia sint, eamdem habent relationem ad *c*; ità ut si *a* bis contineat *c*, ipsum quoque bis continebit *b*, seu *b* erit duplum *c* : si *a* sit dimidium *c*, *b* quoque ejusdem dimidium erit.

PRINCIPIUM III.

54. Ubi duæ magnitudines eamdem habeant relationem ad aliquam tertiam, æquales sunt inter se : si *a* & *b* eamdem habeant relationem ad *c*, si sint ambo, v. g. dupla aut tripla quantitatis *c*, sunt æqualia inter se. Tertium hoc principium est propositio inversa secundi.

PRINCIPIUM IV.

55. Eò major fit ratio aliqua, quò magis crescit ipsius antecedens, consequente eodem permanente : igitur ratio 8 ad 2 major est quàm ratio 6 ad 2 : nam ratio ex dictis nihil est quam modus quo antecedens continet consequentem : Porrò quò major est antecedens, consequente eodem remanente, eò magis continet consequentem : immò dici potest quod ratio major fiat in eâdem proportione, quâ crescit antecedens ; ità

ut si antecedens bis, ter aut quater major reddatur, ratio quoque ipsa bis, ter aut quater major evadat.

PRINCIPIUM V.

56. Eò minor fit ratio aliqua, quò magis crescit ipsius consequens, antecedente eodem remanente: v. g. ratio 3 ad 9 minor est quàm ratio 3 ad 6, & pariter ratio 16 ad 8 minor quam ratio 16 ad 4. Id evidenter sequitur ex notione rationis: namque antecedens idem semper manens minùs continebit consequentem majorem quàm minorem.

PRINCIPIUM VI.

57. Relatio seu ratio duarum magnitudinum æqualis est relationi quæ subsistit inter earum medietates, aut tertias partes, aut quadrantes &c. v. g. ratio, quæ est inter 60 & 20, æqualis est rationi medietatum 30 & 10, rationi quadrantium 15 & 5, rationi quintarum partium 12 & 4 &c. Evidens est hoc principium, quia si è magnitudinibus una aliam ter contineat, ut in exemplo citato, medietas primæ ter continebit medietatem secundæ, quarta pars primæ ter continebit quartam partem secundæ &c. Generatim, relatio quæ est inter tota, æqualis est rationi partium similium: v. g. duorum quadrantium, trium, duodecimarum partium &c.

PRINCIPIUM VII.

58. Dum multiplicantur duæ magnitudines, v. g. 8 & 4, per tertiam aliquam, v. g. 5; producta 40 & 20 inter se habent rationem æqualem rationi duarum priorum magnitudinum antè multiplicationem. Evidens enim est magnitudines 8 & 4 esse partes similes, scilicet quintas partes productorum, quandoquidem multiplicatæ fuerint per 5; jam verò ratio, quæ est inter tota, æqualis est rationi partium similium; adeoque &c. Ad enuntiandum hoc principium, dicitur ordinariè, *producta sunt inter se ut radices, ubi multiplicatæ fuerint per eamdem quantitatem.* In exemplo citato, 8 & 4 sunt radices. Generatim, si multiplicentur a & b per d, producta ad & bd sunt inter se ut radices a & b.

PRINCIPIUM VIII.

59. Ubi duæ magnitudines per aliquam tertiam dividuntur, quoti inter se rationem habent æqualem rationi magnitudinum antè divisionem: v. g. si dividantur 40 & 20 per 5, quoti 8 & 4 eamdem habent relationem ac 40 & 20. Litteraliter, si dividantur ad & bd per d, quoti a & b relationem habent æqualem relationi quantitatum ad & bd. Hoc principium, non secùs ac præcedens est consectarium sexti principii, quia quoti duarum magnitudinum per aliquam tertiam divisarum sunt partes similes harum magnitudinum, si v. g. divisor sit 3, quoti sunt tertiæ partes; si divisor sit 4, quoti sunt quadrantes &c.

SCHOLION.

60. *Ratio duarum magnitudinum*, v. g. 60 *ad* 20 *potest hoc modo indicari*, $\frac{60}{20}$ *collocando consequentem sub antecedente, eosque exiguâ lineâ separando. Ubi duæ rationes sunt æquales, prædicto modo sæpè indicantur, atque interponitur signum æqualitatis: v. g. exprimitur æqualitas rationum* 60 *ad* 20 *&* 30 *ad* 10 *hoc modo* $\frac{60}{20} = \frac{30}{10}$: *ratio pariter* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *significat rationem quantitatis* a *ad* b *æqualem esse rationi quantitatis* c *ad* d. *His positis dico duas rationes esse æquales.*

1°. Ubi quilibet antecedens suum consequentem exactè seu sine residuo & totidem vicibus continet: v. g. ratio quantitatis 12 ad 4 æqualis est rationi quantitatis 15 ad 5, quia primæ rationis antecedens 12 suum consequentem 4 ter continet, quamadmodum antecedens 15 suum consequentem 5 ter continet absque residuo.

2°. Ubi antecedentes æqualiter & sine residuo continent partes aliquotas similes consequentium: v. g. ratio 12 ad 21 æqualis est rationi 8 ad 14, quia duo antecedentes 12 & 8 totidem vicibus continent aliquotas similes consequentium: nam hæ quotæ similes sunt 3 & 2: porrò 3 quater continetur in 12, & 2 quater quoque in alio antecedente 8 continetur.

Evidens est quòd in utroque hoc casu æqualitas occurrat rationum: ratio enim est modus quo antecedens suum continet consequentem; ergò duæ rationes æquales sunt, ubi quilibet antecedens eodem modo continet suum consequentem: atqui in primo casu antecedentes suos consequentes eodem modo continent, cum totidem vicibus

vos contineant : ergò similiter in secundo casu, cum totidem vicibus & sine residuo aliquotas similes consequentium contineant : ergò in utroque casu æquales sunt rationes.

3°. Tandem duæ rationes æquales sunt, ubi uterque antecedens exactè non continens suum consequentem, neque ejus aliquotas similes, has tamen aliquotas totidem vicibus continet cum residuis, quæ rationem inter se habent æqualem rationi aliquotarum similium : V. g. $\frac{81}{120} = \frac{27}{40}$, quia antecedentes 81 & 27 bis continent 30 & 10, quæ sunt consequentium aliquotæ similes : & aliundè antecedentium residua, scillicet 21 & 7 inter se rationem habent æqualem rationi aliquotarum similium 30 & 10.

Loco 30 & 10 aliæ assumi possent aliquotæ similes minores v. g. 15 & 5, quæ quinquies continentur in suo antecedente cum residuis 6 & 2, quorum ratio æqualis est rationi aliquotarum similium 15 & 5.

OBSERVATIO I.

61. In Geometriâ tamen demonstratur quasdam esse magnitudines, scilicet lineas, superficies &c., quæ tales sunt ut nulla unius aliquota possit esse alterius aliquota ; ità ut si una fuerit alicujus rationis antecedens altera verò consequens, impossibile sit reperire aliquam consequentis aliquotam, quantumcunque exigua supponatur, quæ in antecedente absque residuo contineri possit : hujusmodi magnitudines dicuntur *incommensurabiles*, id est, mensuram non habent communem : ratio autem quæ inter eas occurrit vocatur *surda*, vel *relatio immensurabilis* ; dicitur quoque has magnitudines non esse inter se ut numerus ad numerum ; quia nulli sunt numeri qui, ad minimum, pro mensurâ communi unitatem non habeant ; si fuerint integri : Si autem sint fracti, communem semper habebunt mensuram, scilicet aliquam unitatis partem.

OBSERVATIO II.

62. Cùm ratio geometrica nihil aliud sit quàm modus quo antecedens suum continet consequentem, manifestum est dignosci posse alicujus rationis valorem dividendo antecedentem per consequentem ; si quidem unam magnitudinem per alteram dividendo, detegitur quoties prima secundam contineat, seu, quod idem est, quoties secunda in primâ contineatur : v. g. ad detegendum quoties 30 contineat 5, dividendum 30 per 5, & quotus 6 denotat 30 sexties continere 5 : igitur valor rationis $\frac{30}{5}$, est quotus 6 : quod sic indicatur $\frac{30}{5} = 6$: prædictus autem quotus dicitur *exponens*, quia exponit seu notum facit rationis valorem. Exponens igitur indicat quoties antecedens contineat consequentem.

COROLLARIUM I.

63. Exindè sequitur rationem 30 ad 5 esse valdè diversam à ratione 5 ad 30, nam ex dictis valor rationis 30 ad 5 exprimitur per 6 ; valor autem rationis 5 ad 30 est fractio $\frac{1}{6}$ quæ indicat quotum quantitatis 5 divisæ per 30, quoniam 5 nonnisi sextam partem quantitatis 30 continet. Igitur hæc ratio 5 ad 30 est trigesies sexties minor quam ratio 30 ad 5, quia quotus $\frac{1}{6}$ est dumtaxat trigesima-sexta pars alterius quoti 6.

COROLLARIUM II.

64. Sequitur quoque duas rationes esse æquales, ubi exponentes sunt æquales ; & reciprocè exponentes sunt æquales, ubi rationes sunt æquales.

OBSERVATIO.

65. Sæpè sæpiùs antecedentis per consequentem divisio exactè fieri nequit, sive quia consequens ille antecedente est major : sive quia in eo citrà residuum non continetur. Tunc quotus sive exponens potest per aliquam indicari litteram, quæ supponatur rationis valorem repræsentare : v. g. supponi potest $\frac{5}{7} = e$, & $\frac{20}{9} = f$, Generatim ratio $\frac{a}{b} = e$, supponendo quòd littera e repræsentet quotum quantitatis a divisæ per b.

COROLLARIUM.

66. Suprà probavimus (Alg. 37.) productum

quoti per divisorem multiplicati dividendo æquale esse : igitur si supponamus e esse quotum quantitatis a divisæ per b, productum be æquale est antecedenti a, qui est dividendus : consequenter si $\frac{a}{b} = e$, concludi potest $a = be$. Pariter si $\frac{c}{d} = f$, inferri potest $c = df$.

DE PROPORTIONIBUS.

DEFINITIO.

67. Rationum duarum identitas seu æqualitas dicitur *proportio* : *Arithmetica* quidem, si rationes fuerint Arithmeticæ ; *Geometrica*, si Geometricæ.

COROLLARIUM I.

68. Cùm igitur ratio geometrica 15 ad 5 æqualis sit rationi 21 ad 7, hæ duæ rationes proportionem gignunt geometricam, quæ hoc modo indicatur $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$, & communiùs isto 15. 5::21.7. dùm autem enuntianda est hæc proportio, dicitur : 15 est ad 5, ut 21 ad 7, vel 15 & 5 sunt inter se ut 21 & 7 ; aut etiam 15, 5, 21 & 7 sunt proportionalia.

COROLLARIUM II.

69 Cùm rationes arithmeticæ 5 ad 3 & 8 ad 6 æquales sint, proportionem formant arithmeticam, quæ sic indicatur, 5. 3 : 8. 6. Proportio hæc eodem modo enunciatur quo geometrica.

OBSERVATIO I.

70. In omni proportione tum geometricâ, tum arithmeticâ quatuor occurunt termini, qui *proportionales* dicuntur, scilicet antecedens & consequens primæ & secundæ rationis. V. g. in hâc proportione $a.b::c.d$, a & b sunt antecedens & consequens primæ rationis ; c vero & d sunt antecedens & consequens secundæ. Primus & ultimus terminus dicuntur *extremi*, secundus & tertius *medii*. In exemplo nostro a & d sunt extremi, b & c medii.

OBSERVATIO II.

71. Aliquando evenit ut idem terminus sit consequens primæ rationis & antecedens secundæ : tunc terminus ille dicitur *medius proportionalis*, ut in hâc proportione geometrica 5 . 10 :: 10 . 20 aut in istâ arithmeticâ 5 . 10 : 10 . 15. utroque enim in casu 10 est medius proportionalis & proportio vocatur *continua* ; aliàs autem *discreta*. Proportio continua sæpè ita indicatur ∺ 5. 10. 20. Ubi agitur de proportione geometricâ ; ubi verò de arithmeticâ, sic denotatur ipsa, ÷ 5. 10. 15.

OBSERVATIO III.

72. Alterutra proportio continua, dum in ipsâ plures occurrunt termini quàm tres, dicitur *progressio*. Adest progressio geometrica, ∺ 5. 10. 20. 40. 80. 160 &c. Adest autem progressio arithmetica ÷ 5. 10. 15. 20. 25. 30, &c. Progressio igitur est series rationum æqualium, cujus terminus quilibet, exceptis primo & ultimo, est unius rationis consequens, & antecedens subsequentis. Dico, *exceptis primo & ultimo* : manifestum enim est primum esse dumtaxat primæ rationis antecedentem, ultimum verò, ultimæ consequentem.

COROLLARIUM I.

73. Ex iis, quæ dicta sunt, sequitur quòd si duo primi proportionis geometricæ termini æquales fuerint, duo quoque ultimi æquales existant inter se. Pariter si antecedentes fuerint æquales, æquales quoque inter se erunt consequentes & vice versa. Hæc omnia sequuntur ex proportionis geometricæ notione : ut enim duæ rationes sint æquales, uterque antecedens suum consequentem eodem modo contineat oportet.

COROLLARIUM II.

74. Ex dictis rursùm sequitur quòd si antecedentium alter suo consequente fuerit major aut minor, alter quoque suo consequente futurus sit aut major aut minor. Duo hæc corollaria ipsam quoque spectant proportionem arithmeticam.

THEOREMA PRIMUM ET FUNDAMENTALE.

75. *In omni proportione geometricâ productum extremorum est æquale producto mediorum.*

Sit v. g. proportio 8. 4 : : 6. 3. cujus duo extremi sunt 8 & 3, duo autem medii 4 & 6 probandum

probandum est productum quantitatis 8 per 3 æquale esse producto quantitatis 4 per 6.

DEMONSTRATIO.

Si multiplicentur 8 & 4 per 3, productum quantitatis 4 per 3 erit dimidia pars producti quantitatis 8 per 3, siquidem 4 est media pars quantitatis 8 : porrò, si loco multiplicationis quantitatis 4 per 3, fiat multiplicatio ejusdem quantitatis per numerum duplum quantitatis 3, productum erit duplum producti quantitatis 4 per 3, & consequenter æquale producto quantitatis 8 per 3 : atqui secundus medius 6 est necessariò duplus 3; quia, cùm primus antecedens 8 sit duplus sui consequentis 4, necessariò quoque secundus antecedens 6 duplus est sui consequentis, aliàs nulla futura esset proportio; ergò productum quantitatis 4 per 6 æquale est producto quantitatis 8 per 3, sive productum mediorum æquale est producto extremorum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

76. In proportione continuâ productum extremorum æquale est quadrato mediæ porportionalis. Sit proportio continua, *a. b. : : b. c.* dico quòd $ac = bb$, vel $bb = ac$. Id manifestè sequitur ex theoremate; cùm enim quadratum mediæ proportionalis sit productum mediorum, producto extremorum æquale sit oportet.

THEOREMA II.

77. *Ubi productum extremorum æquale est producto mediorum, quatuor magnitudines sunt proportionales. Est propositio inversa primi theorematis.*

Sint quatuor numeri 8, 4, 6, 3, quorum productum extremorum, 8 ⋈ 3, æquale sit producto mediorum 4 ⋈ 6: probandum est quòd 8. 4 : : 6. 3.

DEMONSTRATIO.

Cùm primus multiplicandus 8 sit duplus secnudi multiplicandi 4, opus est ut multiplicator quantitatis 4 sit duplus multiplicatoris quantitatis 8; aliàs producta inæqualia forent, quod est contrà hypothesim : consequenter primus multiplicandus est ad secundum, ut secundus multiplicator ad primum, sive 8. 4. : : 6. 3. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

78. Si tres habueris magnitudines ut *a*, *b*, *c*, quæ tales sint ut productum *ac* extremorum æquale sit quadrato *bb* secundæ magnitudinis *b*, hæc secunda erit media proportionalis inter *a* & *c*, ità ut sis habiturus *a. b : : b. c.*

COROLLARIUM II.

79. Hinc ut habeatur media proportionalis inter duas magnitudines, tantummodo extrahenda est radix quadrata producti harum magnitudinum : hoc enim productum æquale est quadrato, cujus radix est media proportionalis inter duas magnitudines. Undè si inter hos numeros 84 & 362 mediam proportionalem quæras, multiplica 362 per 84, atque à producto 30408 extrahe radicem quadratam; habebis 174 & aliquid ampliùs, quæ radix est media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM III.

80. Quoties duarum magnitudinum productum æquale est producto duarum aliarum, toties fieri potest proportio ex quatuor magnitudinibus duo hæc producta componentibus, assumendo pro extremis duas unius producti radices & pro mediis ambas alterius producti radices : v. g. si $ad = bc$, fieri potest hæc proportio : *a. b : : c. d.*

SCHOLION I.

81. *Duæ alicujus producti radices dicuntur* reciprocæ *duabus alterius producti æqualis radicibus. Generatim duæ magnitudines dicuntur duabus aliis reciprocæ, dum duæ primæ sunt extremi termini alicujus proportionis, cujus duæ aliæ sunt medii :* v. g. a *&* d *sunt reciprocæ quantitatibus* b *&* c, *si* a. b : : c. d.

SCHOLION II.

82. *Utuntur verò Mathematici voce hâc,* reciprocè *in aliâ prorsùs significatione, dicuntque quòd duæ magnitudines sint inter se reciprocè ut duæ aliæ, seu quòd sint reciprocè proportionales duabus aliis, dùm, ut ex iis fiat aliqua proportio, invertendus est ordo duarum priorum aut duarum posteriorum; igitur dùm per duos divisores aliquis dividitur numerus, quoti sunt inter se, non ut divisores (quod significaret primum divisorem esse ad secundum ut primus quotus est ad secundum) sed illi quoti sunt inter se reciprocè ut divisores, id est, divisor primæ divisionis est ad divisorem secundæ, ut quotus secundæ divisionis est ad quotum primæ :* v. g. *si dividatur*

40 per 10 & deindè per 5, primus quotus erit 4 & secundus 8 : porrò 10. 5 :: 8. 4.

SCHOLION III.

83. *Loco hujus termini*, reciprocè, *quandoque utuntur iidem Mathematici his vocibus*, in ratione reciprocâ, in ratione inversâ, *aut etiam* indirectâ, *quæ eumdem habent sensum : igitur in exemplo citato dici potest quotos esse in ratione reciprocâ vel inversâ divisorum.*

COROLLARIUM I.

84. Ex iis, quæ hactenùs dicta sunt, sequitur quòd salva maneat proportio, quæcumque in ejus terminis mutatio fiat, modò productum extremorum maneat æquale producto mediorum. Quare si $a. b :: c. d$, inferre licet,

1°. *Alternando*, $a. c :: b. d$, vel $d. b :: c. a$.

2°. *Invertendo*, $b. a :: d. c.$, vel $d. c :: b. a$.

3°. *Per multiplicationem*, $an. b :: cn. d$, vel $a. bn :: c. dn$, vel $an. bn :: c. d$, vel $a. b :: cn. dn$.

4°. *Per divisionem*, $\frac{a}{n}. b :: \frac{c}{n}. d$, vel $a. \frac{b}{n} :: c. \frac{d}{n}$

vel $\frac{a}{n}. \frac{b}{n} :: c. d$, vel $a. b :: \frac{c}{n}. \frac{d}{n}$

5°. *Componendo*, $a + b. b :: c + d. d$, vel $a. b + a :: c. d + c$.

6°. *Dividendo*, $a - b. b :: c - d. d$, vel $a. a - b :: c. c - d$.

ratio est quod in omnibus his casibus productum extremorum æquale sit producto mediorum, prout examinanti patebit.

COROLLARIUM II.

85. Cum in omni multiplicatione (Arith. 17.) productum toties contineat multiplicandum, quoties multiplicator unitatem, exurgit hæc proportio $ab. a :: b. 1$, vel $1. b :: a. ab$, id est, factum est ad unum è factoribus, ut factor alter ad unitatem.

COROLLARIUM III.

86. Cumque in omni divisione dividendus toties contineat divisorem, quoties unitatem continet quotus, habes hanc proportionem : *dividendus est ad divisorem ut quotus ad unitatem.* Hinc si dividatur 100 per 5, quotus erit 20; erit igitur, 100. 5 :: 20. 1.

THEOREMA III.

87. *In rationum æqualium serie, summa antecedentium est ad summam consequentium, ut unicus antecedens est ad suum consequentem.*

Sint rationes $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}$ &c. æquales.

Summa antecedentium $6 + 8 + 10 + 14 + 16 = 54$ est ad summã consequentium $3 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$ ut antecedens 6 est ad suum consequentem 3, vel ut 8 est ad 4 &c.

DEMONSTRATIO.

Antecedens totalis 54 in easdem partes divisus concipi potest, quæ separatæ erant ante additionem, scilicet 6, 8, 10, 14, 16 : pariter concipi potest consequens totalis 27 in easdem divisus partes, quæ disjunctæ erant ante additionem, scilicet 3, 4, 5, 7, 8. Atqui, per hypothesim, antecedentes particulares, qui sunt partes consequentis totalis, toties, nimirum bis, continent suos consequentes qui sunt partes consequentis totalis : igitur antecedens totalis, seu summa antecedentium bis continet summam consequentium, quemadmodùm antecedentium unus suum bis continet consequentem. Ergò summa antecedentium est ad summam consequentium, ut unus antecedens est ad suum consequentem. Q. E. D.

DE REGULA TRIUM.

DEFINITIO I.

88. *Regula trium*, quæ aliter *aurea* dicitur, propter summam ipsius in vitâ civili utilitatem, aut etiam *regula proportionis*, quia proportionales sunt termini quos includit, ea est cujus ope, cognitis tribus terminis proportionalibus, quartus quispiam detegitur, qui sit tribus his proportionalis : v. g. quæstio hæc, *si 15 operarii fecerunt 20 exapedas, quot facient eodem tempore 45 operarii?* Quæstio, inquàm, hæc per regulam trium resolvitur, quia in ipsâ detegendus proponitur quartus numerus (exapedarum scilicet à 45 operariis faciendarum) tribus cognitis proportionalis, nimirùm 15 operariis, 20 exapedis & 45 operariis.

DEFINITIO II.

89. Regula trium alia *directa*, alia *indirecta* seu *inversa.* Regula directa ea dicitur quæ versatur circa proportiones procedentes vel à majori ad

majus; vel à minori ad minus. Tunc autem proportio dicitur procedere à majori ad majus, quando quò major est tertius terminus, eò major esse debet quartus, qui indagatur; à minori autem ad minus, quando quò minor est tertius terminus, eò quoque minor esse debet quartus. V. g. si quatuor ulnæ constent 7 libellis, quot constabunt 9 ulnæ? Si 4 ulnæ constent 6 libris, quot constabunt 2?

DEFINITIO III.

90. Regula trium indirecta, seu inversa, ea est quæ versatur circa proportiones procedentes vel à majori ad minus, vel à minori ad majus. Tunc verò proportio dicitur procedere à majori ad minus, quando quò major est tertius terminus, eò minor esse debet quartus terminus: à minori autem ad majus, quando quò minor est tertius terminus, eò major esse debet terminus quartus: v. g. si 40 homines opus aliquod 5 diebus absolvant, quot diebus idem opus absolverent 20 homines? Liquidum est, quò pauciores sunt homines, eò plures requiri dies ad opus absolvendum, & similiter, quò plures sunt homines, eò pauciores requiri dies.

SCHOLION I.

91. *Ad inveniendum quartum terminum tribus datis proportionalem, examinandum an regula sit directa, an inversa; quod facilè detegetur per ea quæ diximus* (89 & 90.) *Quod si regula sit directa, quatuor termini ità in proportionem ordinandi sunt, ut loco quarti termini quæsiti apponatur* x; *sic in exemplo superiùs allato* (89.) *termini hoc modo*

ordinandi sunt: 4 . 7 :: 9 . x, *vel* (*ulnæ lib. ulnæ lib.*)

alternando, 4 . 9 :: 7 . x (*ulnæ ulnæ lib. lib.*) *ultima hæc dispositio aptior videtur, quia termini homogenei secum invicem in eâ conferuntur. Ideoque eam semper servare consultum est.*

SCHOLION II.

92. *Quòd si verò regula indirecta seu inversa fuerit, ut in hoc exemplo, 8 operarii intrà dies 24 opus aliquod absolverunt, intrà quot dies opus idem absolvent 12 operarii? In hoc, inquam exemplo non possunt sic ordinari termini,* 8 . 12 :: 24 . x, (*oper. oper. di. di.*) *evidens enim est quòd duo ultimi termini homogenei scilicet 24 & x non sint inter se ut duo primi 8 & 12; ad hoc enim opus esset ut terminus 24, qui correspondet termino 8 tanquam antecedens antecedenti, esset minor termino x, sicut 8 est minor termino 12: verum non ita sese res habet, quia 8 operarii plus temporis insumere debent ad opus aliquod absolvendum quam 12 operarii. Undè duo hi numeri 24 & x sunt inter se reciprocè ut 8 & 12* (82.) *id est*, 8. 12 :: x. 24.

PROBLEMA VII.

93. *Terminum aliquem tribus datis proportionalem invenire, sive proportio directa fuerit, sive inversa.*

RESOLUTIO.

Si regula directa sit: 1°. Terminos in proportionem dispone, prout quidem dictum fuit (91) 2°. Multiplica tertium numerum per secundum, aut vice versâ. 3°. Productum hujus multiplicationis divide per primum terminum, quotus erit quartus terminus quem investigas. Id exprimit sequens versiculus.

Duc ternum in medium, productum divide primo.

Si regula inversa fuerit, terminis dispositis ut suprà (92), primus per ultimum multiplicatur, aut vice versâ, productumque dividitur per secundum; quotus tertium quæsitum indicabit.

EXEMPLUM PRO REGULA DIRECTA.

36 homines impenderunt 24 libellas intra tempus determinatum: quæritur quot lib. intra idem tempus impensuri sint 54 homines? 1°. Hos terminos in proportionem dispono (91) hoc modo: 36. 54 :: 24. x. 2°. Numerum 54 duco in 24 aut vice versâ. 3°. Productum 1296 divido per 36; quotus 36 est terminus quæsitus.

EXEMPLUM PRO REGULA INVERSA.

8 Operarii intra 24 dies opus aliquod absolverunt: intra quot dies opus idem absolvent 12 operarii? 1°. Hos terminos in proportionem dispono (92) hoc modo: 8. 12 :: x. 24. 2°. Multiplico 24 per 8 aut vice versâ. 3°. Productum 192 divido per 12; quotus 16 dat numerum quæsitum. Unde exurgit hæc proportio 8. 12 :: 16. 24.

Cæterùm, in regulâ inversâ, non secus ac directâ, potest terminus quæsitus quarto loco poni, modo consequens primæ rationis ponatur loco

antecedentis & viciſſim. Hinc, in exemplo citato, ſic diſponi poſſunt termini 12. 8 :: 24. x; tuncque regula inſtar directæ reſolvitur.

OBSERVATIO.

94. Si in proportionibus ſive directis ſive inverſis occurrant numeri integri heterogenei, reducendi erunt ad minimam ſpeciem expreſſam, ut habeatur unicus numerus totalis homogeneus: v. g. ſi in proportione directâ ſenſus quæſtionis alicujus ſit: ſi duæ exapedæ cum tribus pedibus & 4 pollicibus valeant 20. l. 15 aſſ. 6 d. quot valebunt 30 exapedæ cum duobus pedibus & 10 pollicibus? 1°. Terminum primum ad ſolos pollices reduco & pro numero totali reperio 184. 2°. Reduco terminum ſecundum ad ſolos denarios & invenio pro numero totali 4986. 3°. Reduco tertium numerum ad ſolos pollices & invenio pro numero totali 2194. 4°. Quæro ſolutionem quæſtionis per problema præcedens. Denique per diviſiones quæro ſpecies ſuperiores nimirum aſſes & libellas.

95. Examen regulæ trium directæ, fit multiplicando terminos extremos, & productum dividendo per mediorum alterutrum: ſi enim quotus, qui reperitur, ſit alter medius, ſignum eſt operationem legitimè factam fuiſſe. Examen autem regulæ indirectæ fit multiplicando terminos medios & productum dividendo per alterutrum extremum.

DEMONSTRATIO REGULÆ TRIUM.

96. Sint tres primi termini a, b, c; ita ut habeatur proportio hæc $a. b :: c. x.$ demonſtrandum eſt magnitudinem x æqualem eſſe producto mediorum b & c, diviſo per primum terminum a, ſeu demonſtrandum eſt quòd $x = \frac{bc}{a}$ ſic autem demonſtro: quoniam $a. b :: c. x.$ Ergò per primum theorema (75.) $ax = bc$ conſequenter ſi quodlibet horum productorum æqualium ax & bc per eandem magnitudinem dividatur, quoti adhuc erunt æquales (Alg. 59.) Hæc igitur duo producta divido per a; habebo $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: atqui $\frac{ax}{a} = x$ (Algeb. 32. reg. 3â). Ergò $x = \frac{bc}{a}$.

97. Regulæ trium hùc uſque explicatæ, ſimplices dicuntur, quia non niſi quatuor complectuntur terminos. Verùm aliæ ſunt quæ compoſitæ vocantur, atque eæ ſunt in quibus plures quàm quatuor occurrunt termini ut in hâc quæſtione: 20 *homines confecerunt* 12 *exapedas intra dies* 8: *quæritur quod exapedas confecturi ſint* 30 *homines intra* 24 *dies?* Poſſunt hujuſmodi regulæ reſolvi, ipſas reducendo ad plures trium regulas ſimplices, prout modo exponemus, ſed antea advertendum terminos quæſtionis propoſitæ ſemper eſſe numero pares, v. g. 6, 8, 10 &c, atque totidem in uno membro eſſe, quot in alio, v. g. tres in unoquoque, ſi quæſtio ſex complectatur, vel 4, ſi quæſtio complectatur 8. his poſitis.

PROBLEMA VIII.

98. *Regulas trium compoſitas reſolvere.*

1°. Suppone unum ex terminis ſecundi quæſtionis membri termino homogeneo primi membri æqualem eſſe, hâcque methodo duos hos terminos veluti ad quæſtionem non ampliùs pertinentes ſpectare poteris. In exemplo v. g. citato ſuppones numerum dierum ſecundi membri eſſe 8, ſicque non niſi quatuor ſupererunt in quæſtione termini: ſcilicet 20 homines, 12 exapedæ, 30 homines, & numerus exapedarum, quas 30 hi homines intra dies 8 confecturi ſunt: reperies autem 18 pro termino quarto. 2°. Poſtmodùm dices: ſi 30 homines conficiant 18 exapedas intra 8 dies, quot exapedas conficient 30 illi homines intra 24 dies? Hominum numerus idem eſt in utroque membro, igitur 30 homines ex utroque membro evaneſcunt, ſolùmque ſupererunt 4 termini, ſcilicet 8 dies, 18 exapedæ, 24 dies, & numerus x exapedarum intra 24 dies conficiendarum. Quæſtio igitur hæc unicam dumtaxat includit regulam trium ſimplicem, quâ reſolutâ habebis 54 exapedas à 30 hominibus intra dies 24 conficiendas.

SCHOLION.

99. *Generatìm loquendo, totidem fiunt regulæ trium ſimplices, demptâ unâ, quot ſunt in utroque membro termini: ſi tres occurrant termini, conficiendæ ſunt duæ trium regulæ; ſi quatuor, tres; ſi quinque, quatuor &c. annotandum tamen plures quàm quatuor terminos in quâlibet regulâ trium ſimplici occurrere non debere. Agendo de rationibus compoſitis, breviorem & faciliorem trademus methodum ad prædictarum regularum reſolutionem.*

DE REGULA SOCIETATIS.

DEFINITIO PRIMA.

100. Regula simplex societatis ea dicitur, quâ mediantè certus numerus, vel lucrum vel damnum significans, proportionaliter distribuitur inter eos qui per idem temporis intervallum societatem inierunt. Supponamus v. g. quod tres mercatores societatem commercii inierint; quòd primus contulerit 10000 lib., secundus 14000, tertius 16000: supponamus insuper quòd lucrati sint 8000 lib. distribuendæ sunt hæ 8000 libellæ in partes proportionales summæ à socio quolibet collatæ. Sit igitur.

PROBLEMA IX.

101. *Numerum aliquem, lucrum vel damnum significantem, distribuere in partes magnitudinibus datis proportionales.*

RESOLUTIO.

1°. Singulas pecuniæ summas in unicam totalem collige. 2°. Tot institue regulas simplices trium, quot sunt socii, ita ut primus cujuslibet regulæ terminus sit collectio summarum à quolibet socio collatarum, secundus lucrum totale, tertius verò summa particularis ab unoquoque sociorum collata, quartus erit lucrum obveniens illi socio cujus summa est tertius proportionis terminus. In exemplo nostro collectio summarum particularium est 40000, lucrum totale est 8000 lib. Igitur instituendæ erunt tres proportiones sequentes:

$$\begin{cases} 40000 \text{ L.}\ 8000 \text{ L} :: 10000 \text{ L.}\ x = 2000 \text{ L.} \\ 40000\ .\ 8000 :: 14000\ .\ y = 2800 \\ 40000\ .\ 8000 :: 16000\ .\ z = 3200 \end{cases}$$

Resolutis tribus his regulis, innotescit quænam lucri pars ad quemlibet socium pertineat. Scilicet primo socio obveniunt 2000 libræ, secundo 2800, tertio autem 3200. Si verò dignoscere volueris an ritè fuerint operationes peractæ, tria lucra particularia simul adde: si summa lucro totali adæquatur, signum est quòd legitimè sis operatus.

DEFINITIO II.

102. Regula societatis composita est in quâ, præter considerationem summarum à pluribus sociis collatarum insuper habenda est ratio temporis, ut si in exemplo citato (100) supponatur primum socium pecuniam suam contulisse pro 10 mensibus, secundum pro 15, tertium verò pro 20.

PROBLEMA X.

103. *Regulas societatis compositas resolvere.*

RESOLUTIO.

1°. Multiplica summam cujuslibet socii per suum tempus, id est, 10000 per 10, 14000 per 15, & 16000 per 20. Aderunt producta 100000, 210000, & 320000: 2°. Producta hæc simul adde, seu in summam totalem collige: summa totalis 630000 erit primus porportionis terminus, secundus lucrum totale, tertius productum summæ cujuslibet socii per tempus sibi proprium: igitur tres aderunt proportiones:

$$\begin{cases} 630000 \text{ L.}\ 8000 \text{ L} :: 100000.\ x = 1269\frac{53}{63} \\ 630000\ .\ 8000 :: 210000.\ y = 2666\frac{42}{63} \\ 630000\ .\ 8000 :: 320000.\ z = 4063\frac{31}{63} \end{cases}$$

Cùm summa trium terminorum repertorum lucro totali 8000 lib. Adæquetur, operationes legitimè factas conclude.

Si tempora diversæ sint speciei alia nimirùm anni, alia menses &c, omnia tunc ad speciem infimam expressam revocanda sunt.

DE REGULA PERMIXTIONIS

(Vulgo *régle d'alliage.*)

DEFINITIO I.

104. Regula permixtionis est methodus resolvendi quæstiones, in quibus proponitur plurium mercium diversi valoris, permixtio, certis conditionibus enunciatis, facienda. Adinstar regulæ *trium*, directa est, vel indirecta.

DEFINITIO II.

105. Regula permixtionis *directa* est methodus inveniendi pretium medium cujuscumque permix-

tionis, cujus partes componentes; & partium pretia innotescunt.

EXEMPLUM REGULÆ PERMIXTIONIS DIRECTÆ.

Ænopola permiscere vult duas vini species diversi valoris : scilicet 8 pintas vini assibus 10 constantis, & 12 pintas vini asses 15 valentis. Quæritur pretium medium, seu pretium unius pintæ, factâ permixtione?

Solutio. Sume summam pintarum permixtionem componentium, sc. 20 : sume pariter pretium harum omnium pintarum, sc. 260 asses : demum sequentem institue proportionem : summa pintarum est ad pretium totale, sicut una pinta est ad pretium medium quæsitum; sive, 20. 260 :: 1. $x = 13$.

Hæc quæstio, ut perspicuum est mediante simplicis regulâ trium resolvitur; suamque secum defert demonstrationem. Posset etiam solvi per divisionem : si enim pretium totale per summam pintarum dividatur, quotus pretium quæsitum indicabit, ut vel leviter attendenti manifestum fiet.

DEFINITIO III.

106. Regula permixtionis *indirecta* est methodus quâ, datis pretio medio, seu pretio permixtionis, & pretiis mercium miscendarum, inquiruntur portiones mercium sumendæ ad permixtionem peragendam. Hæc regula ad tres casus generales reduci potest : nam postulari potest.

1°. Ut, non assignatis portionibus mercium permiscendarum, fiat permixtio indeterminatæ quantitatis.

2°. Ut, assignatâ portione unius mercis permiscendæ, fiat iterum permixtio cujus indeterminata sit quantitas.

3°. Tandem, ut, non assignatis portionibus mercium permiscendarum fiat permixtio determinatæ quantitatis.

Cum quilibet casus peculiarem exigat solutionem, exemplum unicuique proprium proferemus. Observa, in quocumque casu, innotescere debere pretium medium & pretium mercium miscendarum.

EXEMPLUM PRO PRIMO CASU.

107. Stanni libra constat assibus 16, & libra plumbi assibus 10; quæritur quanta utriusque portio sumenda sit ut fiat indeterminata permixtio cujus libra asses 12 valeat?

Solutio. Confer pretia particularia cum pretio medio 12, ut innotescat ipsorum & pretii medii differentia. Dein assigna pretio majori excessum pretii medii suprà minus§, & pretio minori excessum pretii majoris suprà medium : hæ differentiæ indicabunt portionem uniuscujusque mercis assumendam ad permixtionis compositionem; ut videre est in schemate hîc apposito.

		Differ.
Pretium majus	=16 ass.	2
Pretium medium	=12 ass.	
Pretium minus	=10 ass.	4
Summa differentiarum	=	6

In exemplo præsenti assumi debent duæ partes stanni & quatuor plumbi; quoniam autem partium miscendarum summa est $2+4=6$; portiones sumendæ sunt $\frac{2}{6}$, & $\frac{4}{6}$; sive $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$.

Si tres fuerint merces quarum facienda proponitur permixtio, pretio medio, v. g. assibus 12, vendenda. 1°. Earum duæ ad quodcumque pretium medium reducendæ sunt, juxta methodum mox traditam; dein quantitas permixta, adinstar mercis simplicis, cum 3ª superstite conferetur, ut, ope prædictæ methodi, prodeat integra permixtio valoris assignati. Simili modo procedendum, si quatuor aut plures merces miscendæ proponantur.

Ratio prædictæ operationis facilè intelligitur; evidens quippè est mercem unam eò majorem constituere debere permixtionis portionem, quò minus; eò minorem autem, quò plus à pretio medio differt; quare portiones sumendæ sequuntur rationem inversam differentiarum à pretio medio; igitur portio mercis pretiosioris designatur per differentiam inter pretium vilioris & pretium medium; portio autem vilioris per excessum pretii majoris suprà medium.

EXEMPLUM PRO SECUNDO CASU.

108. Quæritur quot sumi debeant modii frumenti assibus 100 constantes, ut cum 14 siliginis modiis asses 60 valentibus, fiat permixtio cujus modius assibus 72 constet?

Solutio. Sume differentias occurrentes inter

pretia particularia & pretium medium; easque in ordine inverso colloca, ut in exemplo præcedenti; quo facto, innotescit sumendos esse 12 frumenti & 28 siliginis modios ut habeatur permixtio valoris assignati.

		Differ.
Pret. maj.	= 100	12
Pret. med.	= 72	
Pret. min.	= 60	28

Verum cum, in præsenti quæstione, miscenda siliginis quantitas fixa sit & determinata, nempè modii 14; ut innotescat sumenda frumenti quantitas, sequens instituenda est proportio: quantitas siliginis mox inventa, est ad quantitatem assignatam, ut quantitas frumenti etiam reperta est ad quantitatem quæsitam; sive $28. 14 :: 12. x = 6$, posterior numerus indicat sumendos esse 6 frumenti modios.

Hujus operationis ratio manifesta fit ubi operatio inversa peragitur: si enim misceantur 14 modii sigilinis 60 assibus valentes, cum 6 modiis frumenti assibus 100 constantibus, exurget permixtio valoris 72 assium, ut examinanti patebit.

EXEMPLUM PRO TERTIO CASU.

109. Quæritur quot sumendæ sint pintæ vini generosi 50 ass., constantis & vini inferioris 30 ass. valentis, ut fiat permixtio 25 pintarum, 38 ass. valentium?

Solutio. Confer, cum pretio medio, pretia particularia, differentiasque colloca in ordine inverso, ut in exemplis præcedentibus: deindè sume differentiarum summam.

		Differ.
Pret. maj.	= 50	8
Pret. med.	= 38	
Pret. min.	= 30	12
Summa differentiarum		= 20.

Demùm sequentes institue proportiones: quantitas permixtionis inventæ, 20, est ad quantitatem permixtionis assignatæ 25, ut differentiæ inventæ, sunt ad quantitates quæsitas; ultimi proportionum termini quantitas quæsitas dabunt.

$$20. 25 :: 8. x = 10$$
$$20. 25 :: 12. x. = 15$$

Hujus operationis ratio facilè etiam intelligitur per operationum inversam: enim verò 10 pintarum, 50 ass. constantium, valor est 500 assium; & 15 pintarum 30 ass. valentium, pretium est 450 assium; jam vero si hæ summæ adunatæ dividantur per 25, prodibit quotus 38, seu pretium medium assignatum.

$$500 + 450 = 950$$
$$\frac{950}{25} = 38$$

Omni examinanti manifestum fiet Methodum generalem hìc traditam, variis mercibus valoris diversi permiscendis; sive oleis, sive casæis, sive metallis, demùm objectis quam plurimis negotio aptis, inservire posse, mutatis caracteribus assignatarum Mercium propriis.

DE RATIONIBUS COMPOSITIS.

DEFINITIO I.

110. *Ratio composita* est productum duarum vel plurium rationum: habetur autem hoc productum multiplicando antecedentes per invicem, nec non consequentes. Sic v. g. $\frac{ac}{bd}$ est ratio composita rationum $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: pariter $\frac{acg}{bdh}$ est ratio composita trium rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$.

DEFINITIO II.

111. Rationes, ex quarum multiplicatione resultat ratio composita, dicuntur *rationes componentes*, aut *simplices*: igitur in primo exemplo mox citato $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sunt rationes componentes rationis compositæ $\frac{ac}{bd}$: pariter in secundo exemplo $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ & $\frac{g}{h}$ sunt rationes componentes rationis compositæ $\frac{acg}{bdh}$.

DEFINITIO III.

112. Ubi dumtaxat duæ sunt rationes componentes eædemque æquales, ratio composita vocatur *duplicata*: v. g. si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ratio composita $\frac{ac}{bd}$ est duplicata. In numeris pariter, cùm rationes $\frac{12}{3}$ & $\frac{8}{2}$ sint æquales, ratio composita $\frac{96}{6}$ est duplicata. Igitur ratio duplicata est productum duarum rationum æqualium: si verò unica sit ratio simplex, ratio ex eâ duplicata est productum hujus rationis simplicis semel per seipsam multiplicatæ. Porrò ad multiplicandam rationem aliquam per seipsam, multiplicandus est antecedens per antecedentem & consequens per consequentem: v. g. productum rationis $\frac{6}{2}$ multipli-

catæ per seipsam est $\frac{36}{4}$. Ex quo colligere pronum est quòd ad habendam rationem duplicatam ex aliâ ratione, assumendum sit quadratum antecedentis & quadratum consequentis; ratio autem horum quadratorum ex primâ ratione duplicata est. Ratio autem radicum subduplicata dicitur.

DEFINITIO IV.

113. Ubi tres sunt rationes componentes, eædemque æquales, ratio composita dicitur *triplicata*: v. g. si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{g}{h}$, ratio composita $\frac{acg}{bdh}$ est triplicata. Pariter ratio $\frac{30}{240}$ est triplicata ex tribus rationibus æqualibus $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{10}$: ratio igitur triplicata est productum trium rationum æqualium; si verò unica fuerit ratio simplex, ratio ex eâ triplicata est productum hujus rationis simplicis bis per seipsam multiplicatæ; quod fit assumendo cubum antecedentis & cubum consequentis: igitur ratio triplicata ex ratione $\frac{4}{3}$ est $\frac{64}{27}$; ratio autem radicum $\frac{4}{3}$ subtriplicata nuncupatur.

COROLLARIUM.

114. Magna est disparitas inter rationem duplam & rationem duplicatam; rationem triplam & rationem triplicatam. Ratio dicitur *dupla*, dum antecedens est duplus consequentis; igitur ratio 10 ad 5 est dupla: ratio dicitur *tripla*, dum antecedens est triplus consequentis: igitur ratio 15 ad 5 est tripla. È contrà ratio dicitur *subdupla*, ubi antecedens est dimidium consequentis, & *subtripla*, ubi antecedens est triens seu tertia pars consequentis.

SCHOLION IV.

115. *Quandò duæ occurunt rationes, ut* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *& ad eas multiplicandas invertitur una ex illis, ut si assumatur* $\frac{d}{c}$ *pro* $\frac{c}{d}$, *tunc productum* $\frac{ad}{bc}$ *est ratio composita rationis directæ* a *ad* b, *& rationis inversæ* c *ad* d. *Pariter* 10 *&* 12 *sunt in ratione compositâ rationis directæ* 2 *ad* 3 *& rationis inversæ* 4 *ad* 5.

THEOREMA IV.

116. *Ratio, quæ est inter duo quadrata, est duplicata ex ratione quæ est inter radices; ratio, quæ est inter cubos, est triplicata ex ratione radicum;* seu aliter, *quadrata sunt in ratione duplicatâ radicum, cubi verò sunt in ratione triplicatâ radicum.*

DEMONSTRATIO.

1°. 64 est quadratum quantitatis 8, & 9 est quadratum quantitatis 3: atqui ratio duorum horum quadratorum, quæ est $\frac{64}{9}$, est duplicata ex ratione radicum 8 & 3, siquidem ad habendam rationem duplicatam rationis $\frac{8}{3}$, tantummodò assumendum sit antecedentis & consequentis quadratum. (113.) Ergò quadrata sunt in ratione duplicatâ radicum. Quod erat primum.

2°. 8 est cubus quantitatis 2, & 64 est cubus quantitatis 4: atqui ratio horum cuborum, quæ est $\frac{8}{64}$, est triplicata ex ratione $\frac{2}{4}$, quæ est ratio radicum 2 & 4. (113 Alg.) Ergò cubi sunt in ratione triplicatâ radicum. Quod erat alterum.

THEOREMA V.

117. *Exponens rationis compositæ æqualis est producto exponentium rationum componentium.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ rationes simplices $\frac{10}{2}$ & $\frac{6}{3}$ quorum exponentes sunt 5 & 2; dico exponentem rationis $\frac{60}{6}$ ex præcedentibus compositæ; æqualem esse producto exponentium rationum simplicium, $= 5 \times 2 = 10$. Nam multiplicando ambos primæ rationis terminos $\frac{10}{2}$ per consequentem secundæ 4, productum antecedentis quinquies continebit productum consequentis (58): sed si idem antecedens 10 multiplicetur per secundum antecedentem 6, qui sui consequentis 3 duplus est, secundum hoc

hoc productum bis quinquies, seu decies continebit productum consequentis; igitur exponens rationis compositæ $\frac{10 \times 6}{2 \times 3}$ seu $\frac{60}{6} = 5 \times 2 = 10$ seu productum exponentium rationum simplicium.

Pari ratione demonstrari potest, quod si antecedens unius rationis per antecedentem alterius, & consequens per consequentem dividatur, exponens rationis quotorum æqualis erit quoto primi exponentis per secundum divisi. Sic si $\frac{24}{4}$ cujus exponens est 6, dividatur per $\frac{6}{2}$ cujus exponens est 3, exponens rationis quotorum $\frac{4}{2}$ erit $= 2 = 6$ divisum per 3.

COROLLARIUM I.

118. Hinc si unius proportionis termini multiplicentur per terminos alterius, primus per primum, secundus per secundum, & sic deinceps, producta erunt adhuc proportionalia. Pariter si unius proportionis termini per alterius terminos dividantur, quoti erunt etiam proportionales; enim vero exponentes rationum inter producta occurrentium in 1° casu, & inter quotos in 2°, erunt æquales; utpotè producta, vel quoti, duarum quantitatum æqualium, per duas æquales multiplicatarum, vel divisarum (58 & 59). Quare si $a . b :: c . d$, & $m . n :: o . p$, erit etiam, $am . bn :: co . dp$, & $\frac{a}{m} . \frac{b}{n} :: \frac{c}{o} . \frac{d}{p}$.

COROLLARIUM II.

119. Hinc si plures quantitates fuerint proportionales, earum potentiæ similes erunt etiam proportionales, & viciffim: sic si $a . b :: c . d$. erit $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2 . : a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$. Pariter si $m^2 . n^2 :: o^2 . p^2$. erit etiam $m . n :: o . p$. id evidenter sequitur ex Corollario 1°.

SCHOLION.

120. *Quæ hactenùs diximus de rationibus compositis, brevem & facilem subministrant methodum ad regulas trium compositas per simplicem proportionem resolvendas. Sit v. g. exemplum jam anteà resolutum: 20 operarii confecerunt 12 exapedas intra dies 8: quot exapedas conficient 30 operarii intra dies 24. Omni attendenti palàm fit relationem occurrentem inter exapedas confectas & conficiendas componi ex rationibus operariorum & dierum quæ, in præsenti casu, sunt directæ; nam quo plures erunt & operarii & dies, eo major conficietur exapedarum numerus: relatio operariorum est $\frac{20}{30}$; relatio dierum $\frac{8}{24}$; ratio autem ex iis composita est $\frac{20}{30} \times \frac{8}{24}$ sive $\frac{160}{720}$. Quare numerus exapedarum confectarum est ad numerum conficiendarum ut 160 est ad 720. Factâ igitur hâc proportione, 160 . 720 :: 12 . x, terminus ultimus = 54 quæsitum exapedarum numerum indicabit.*

Hujus operationis ratio facilè advertitur; enim verò perspicuum fit operarios 20, per dies 8 laborantes, idem opus conficere debere ac operarii 160 per diem unum: pariter operarii 30 diebus 24 operantes, idem absolvere debent opus ac operarii 720 intra diem unum; quare relatio inter exapedas confectas & conficiendas, sc. $\frac{12}{54}$ æquat necessariò rationem $\frac{160}{720}$.

Nonnunquam ratio occurrens inter duos postremos proportionis terminos componitur ex unâ ratione directâ & alterâ inversâ. Sit v. g. exemplum sequens: 40 homines vixerunt 18 diebus cum 12 modiis tritici: quot diebus vivent homines 60 cum modiis 24? Ratio quæ inter dies notos & quæsitos occurrit, componitur ex ratione inversâ hominum, quia quò plures erunt homines, eo pauciori tempore vivent cum assignatâ tritici quantitate; & ex ratione modiorum directâ; quia quo plures erunt modii eo diutiùs vivent iidem homines; quare sic ordinari debent rationum componentium termini $\frac{60}{40} \times \frac{12}{24}$, factâque multiplicatione, sequens instituetur proportio, cujus terminus ultimus numerum quæsitum aperiet. 720. 960 :: 18. x = 24.

Deniquè evenit aliquando utramque rationem componentem esse inversam; ut in exemplo sequenti: 40 homines, operandò quotidiè per 12 horas, domum ædificarunt intra 25 dies: intra quot dies idem opus absolvent homines 50, operando quotidiè per horas 15? In hoc exemplo relatio inter dies notos & quæsitos componitur ex rationibus inversis operariorum & horarum; quia quò plures erunt operarii, & quò pluribus horis quotidiè laborabunt, eo pauciores impendent dies. Quare, ut habeantur rationum componentium producta, sic ordinari debent termini: $\frac{50}{40} \times \frac{15}{12}$, quo facto, sic instituetur proportio: 750. 480 :: 25. x = 16, qui posterior terminus dies quæsitos indicabit.

Si 4 in quolibet membro forent termini, ratio occurrens inter duos postremos componeretur ex tribus rationibus; ex quatuor autem, si 5 in quolibet membro adessent termini, & sic deinceps.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

121. *In proportione arithmeticâ summa extremorum æqualis est summæ mediorum.*

Sit proportio arithmetica 5. 8 : 9. 12 : dico summam extremorum 5 + 12 æqualem esse summæ mediorum 8 + 9.

DEMONSTATIO.

In exemplo citato (idem dic de omni alio, proportione servatâ) si primum extremum 5 per primum medium 8 superatur quantitate 3, secundum extremum 12 necessariò superat secundum medium 9 eâdem quantitate 3; aliàs nulla esset proportio arithmetica; ergò defectus primi extremi compensatur per excessum secundi, adeòque summa extremorum 5 + 12 debet æquare summam mediorum 8 + 9. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

123. In proportione continuâ arithmeticâ summa extremorum est æqualis duplo medii proportionalis : v. g. si habeatur hæc proportio continua 5. 8 : 8. 11, summa extremorum 5 + 11 vel 16 æquat 8 + 8 sive 16, duplum medii proportionalis. Ratio est quia duplum medii proportionalis est summa mediorum, quæ consequenter adæquare debet summam extremorum.

SCHOLION I.

130. *Si tres proportionis alicujus arithmeticæ termini cognoscantur, jam difficilè non est alium adinvenire. Suppono notos esse tres primos terminos* a,b,e, *& inquiri quartum, quem appello* x : *per hypothesim* a. b : e. x, *aderit igitur æqualitas* $a + x = b + e$; *& consequenter subtrahendo* a *ex utrâque parte, supererit* $x = b + e - a$, *id est, ad reperiendum terminum quæsitum, simul addenda sunt duo media, & subtrahendus à summa primus terminus. Ostendetur pariter quòd si nota sint duo extrema cum uno medio, habebitur aliud medium simul addendo duo extrema, & medium cognitum è summa extremorum subtrahendo. Si habeantur extrema* a *&* f *cum medio* b, *aliud medium erit:* $x = a + f - b$. *Quòd si verò continua sit proportio, ad inveniendum tertium terminum, duplicandum erit medium proportionale, & subtrahetur primus terminus : primus terminus sit* a, *secundus* b, *tertius erit* $x = 2b - a$. *Si duo extrema sint nota, & quæratur medium proportionale, addenda sunt duo extrema, & assumendum summæ dimidium. Sint duo extrema nota* a *&* e, *medium proportionale* x *erit* $\frac{a+e}{2}$: *nam per hypothesim* a. x : x. e; *ergò* $2x = a + e$, *atque membrum quodlibet dividendo per* 2, *aderit* $x = \frac{a+e}{2}$.

SCHOLION II.

Vera etiam est inversa theorematis fundamentalis propositio; idest si extremorum summa æqualis sit summæ mediorum, quatuor quantitates proportionem arithmeticam constituent. V. g. si $a + f = b + e$, *erit* a. b : e. f; *cum enim summa* $a + f$ *æquet* $b + e$, *perspicuum est quod si* b *excedat* a, *quantitate* d, *necesse est ut* f *excedat etiam* e *eâdem quantitate; alias* $a + f$ *non æquaret* $b + e$; *quod est contra hypotesim; cum ergo quilibet consequens eâdem quantitate suum excedat antecedentem, habebitur sequens proportio,* a. b : e. f. *ex quo sequitur in proportione arithmeticâ fieri posse mutationes dictas* invertendo & alternando *sine proportionis destructione.*

DE FRACTIONIBUS.

DEFINITIO.

124. *Fractio* est quantitas exprimens relationem unius partis vel plurium partium ad totum. Fractio duobus exprimitur numeris, quorum unus indicat in quot partes æquales dividatur totum & dicitur *denominator*, alter verò designat quot ex illis partibus assumantur, & vocatur *numerator*; scribitur denominator sub numeratore, eos exiguâ lineâ separando, hoc modo $\frac{3}{5}$: enuntiatur porrò hæc fractio dicendo, tres quintæ partes. Quòd si fractio litteris exprimatur, ut $\frac{a}{b}$, ostendit divisum esse totum in numerum partium indeterminatum & denominatore *b* designatum, & assumi quoque earumdem partium numerum indeterminatum, qui per numeratorem *a* indicatur.

OBSERVATIO I.

125. Fractionis alicujus numerator denominatori æqualis esse potest, aut eo minor, aut major. In primo casu fractio æqualis est toti, quod spectatur ut unitas: v. g. $\frac{4}{4} = 1$. Ratio est quòd totum omnibus suis partibus simul sumptis adæquatur. In secundo casu, fractio minoris est valoris quàm unitas, talis est fractio $\frac{3}{4}$. In tertio demum casu, fractio major est unitate, ut v. g. $\frac{5}{4}$. Generatim fractio est per respectum ad unitatem, ut numerator ad denominatorem.

OBSERVATIO II.

126. Si duæ adsint fractiones, quarum numeratores denominatoribus minores sint, & ab iis æqualiter differant, quæ majoribus exprimitur numeris, est quoque major. Igitur ex duabus his fractionibus $\frac{14}{15}$ & $\frac{9}{10}$, quarum numeratores à denominatoribus dumtaxat per unitatem differunt, prima major est secundâ. Nam prima toto minor est tantummòdò decimâ quintâ parte, siquidem fractio $\frac{15}{15}$ totum adæquat; secunda veró minor est toto unâ decimâ parte. Atqui evidens est unam decimam quintam partem minorem esse unâ decimâ parte: ergò prima minùs à toto differt quam secunda, ergò major est. Verùm si numeratores denominatoribus extiterint majores, atque ab iis æqualiter differant, fractio majoribus expressa numeris, est minor: v. g. fractio $\frac{13}{12}$ minor est hâc $\frac{7}{6}$, quia prima unitatem non excedit, nisi unâ duodecimâ parte, secunda verò unitatem superat unâ sextâ parte.

COROLLARIUM.

127. Quoniam fractio valet 1, dum æquales sunt num. & denom.; sequitur quod valeat 2, ubi numerator duplus est denominatoris, quòd valeat 3, ubi numerator triplus est denominatoris &c. v. g. cum fractio $\frac{4}{4}$ valeat 1, adest quoque $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{20}{4} = 5$ &c. Generatim fractio semper æqualis est quoto numeratoris per denominatorem divisi: v. g. fractio $\frac{20}{4} = 5$, quia quotus numeri 20 divisi per 4 est 5. Porrò vidimus valorem rationis æqualem quoque esse quoto antecedentis per consequentem divisi; igitur ratio 20 ad $4 = 5$: quamobrem fractio $\frac{20}{4}$ eadem est ac ratio 20 ad 4 hæcque est secunda fractionis notio.

128. Ubi numerator denominatore minor est, licet tunc primi per secundum divisio peragi nequeat, fractio est tamen divisio indicata: ità fractio $\frac{3}{5}$ indicat 3 dividi per 5, id est, assumi dumtaxat quintam partem numeri 3. Ex quo sequitur has expressiones, *tres quintæ partes* & *quinta pars trium*, idem prorsùs significare, prout exemplo facilè probari potest, undè quantitas $\frac{3}{5}a$ vel $\frac{3}{5} \times a = \frac{3a}{5}$, quoniam prima tres complectitur quintas partes quantitatis a, secunda verò est quinta pars trium a.

PROBLEMA I.

129. *Fractiones reducere ad minores terminos.*

RESOLUTIO.

Numeratorem & denominatorem divide per eundem divisorem, & dabunt ambo quoti fractionem ejusdem valoris cum propositâ, quamvis minores extent termini. V. g. fractio $\frac{12}{15}$ ad minores terminos reduci potest, dividendo num. & denomin. per 3, & aderit $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Pariter si per 5 dividantur termini hujus fractionis $\frac{5}{20}$ aderit

$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$. Litteraliter, ad reducendam fractionem algeb. $\frac{ad}{bd}$, dividendus numerator & denomin. Per divisorem communem d & habebitur $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$.

SCHOLION I.

130. *Faciliùs peragetur reductio hæc, si assumatur dimidium numeratoris & dimidium denominatoris. V.g.* $\frac{40}{60} = \frac{20}{30} = \frac{10}{15}$, *pariter* $\frac{64}{80} = \frac{32}{40} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. *Verum evidens est locum non habere methodum hanc nisi duo fractionis termini sint numeri pares; atque ideò in primo exemplo ultima occurrit fractio hæc* $\frac{10}{15}$, *licet ipsa ulteriùs reduci possit, ineundo divisionem per 5 quod dabit* $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

SCHOLION II.

131. *Quando terminorum alter est unitas, impossibile est fractionem ad minores terminos revocare: v.g.* $\frac{1}{5}$ *reduci nequit; pariter ubi numerator unitate tantummodò superatur à denominatore, fieri nequit reductio prædicta, sic reduci nequit fractio* $\frac{14}{15}$.

PROBLEMA II.

132. *Fractiones ad eundem denominatorem reducere.*

RESOLUTIO.

Ad reducendas fractiones duas, ut $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$ ad eundem denominatorem, eodem manente fractionum valore, ambos primæ fractionis terminos multiplica per 3 denominatorem secundæ, aderit $\frac{15}{18}$: multiplica pariter ambos secundæ fractionis terminos per 6 denominatorem primæ, aderit quoque $\frac{12}{18}$: fractiones igitur reductæ erunt $\frac{15}{18}$ & $\frac{12}{18}$, quæ ejusdem sunt valoris ac duæ primæ $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$, quæque eundem habent denominatorem.

133. Si tres essent fractiones ad eundem denomin. reducendæ, cujuslibet fractionis numerator & denomin. multiplicandi forent per productum denominatorum duarum aliarum: sint tres hæ fractiones $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ ad eundem denomin. Reducendæ: observatâ regulâ, aderunt fractiones reductæ, $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, & $\frac{72}{90}$.

134. Eadem observatur methodus in fractionibus litteralibus: v. g. fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ad has reducuntur $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. Si tres adsint fractiones, procede ut præcipitur, (133) proportione servatâ.

SCHOLION.

135. *Duas fractiones ad eundem donomin. reducendo, facilè detegitur quænam sit major; immo & cognosci potest relatio exacta unius ad aliam, siquidem sunt inter se ut fractionum reductarum numeratores. Si adsint, v. g.,* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, *quarum investigetur relatio seu ratio; reducendæ sunt ad eundem denominatorem, aderuntque duæ novæ fractiones* $\frac{28}{35}$ & $\frac{15}{35}$ *prioribus æquales. Porrò duæ hæ fractiones ultimæ sunt inter se ut numeratores* 28 & 15. *nam duæ fractiones sunt quoti numeratorum per denominatorem divisorum (127) & aliundè cùm denominator, qui est divisor, hîc idem sit, quoti sunt inter se ut dividendi, id est, ut numeratores (59).*

PROBLEMA III.

136. *Numerum integrum in fractionem datæ denominationis convertere.*

RESOLUTIO.

Numerum propofitum per denominatorem fractionis quæfitæ multiplica, & productum erit numerator fractionis illius. V. g. ad reducendum 5 in trientes, feu in fractionem, quæ habeat 3 pro denominatore, multiplico 5 per 3; productum verò 15 eft numerator fractionis $\frac{15}{3}$, quæ adæquat 5, fiquidem numerator, qui eft productum 5 per 3, feu, quod idem eft, 3 per 5, denominatorem 3 quinquies continet.

PROBLEMA IV.

137. *Reducere fractionem in numerum integrum.*

RESOLUTIO.

Divide numeratorem per denominatorem, & quotus fractionis valorem exprimet: v. g. fi in numerum integrum reducere volueris fractionem $\frac{15}{3}$, divide 15 per 3; quotus 5 fractionis propofitæ indicat valorem. Reductio hæc, ut patet, fieri nequit nifi ubi numerator denominatori æqualis eft aut ipfo major.

SCHOLION.

138. *Si divifio exactè fieri non poffet, ut in fractione* $\frac{17}{3}$, *valor hujus fractionis effet numerus integer 5, qui reperiretur in quoto,* + *refiduum numeratoris, fcilicet 2, cui femper dandus foret idem denominator 3: igitur* $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$.

PROBLEMA V.

139. *Cognito valore integri, cognofcere valorem fractionis cujuflibet*, feu breviùs, *fractionem æftimare.*

RESOLUTIO.

Multiplica numerum, qui indicat valorem totius per numeratorem fractionis & productum divide per ipfius denominatorem, habebis pro quoto valorem quæfitum: v. g. fi valor unius ulnæ panni fit 20 lib. & quæratur valor hujus fractionis ejufdem ulnæ $\frac{3}{5}$, multiplica 20 per numeratorem 3, productum divide per denominatorem 5, quotus 12 indicabit hanc ulnæ fractionem æquivalere 12 libellis. Eodem proportionaliter modo reperies hanc fractionem $\frac{2}{3}$ unius pedis, æquivalere 8 pollicibus, item hanc $\frac{4}{5}$ unius nummi, 48 affibus.

SCHOLION.

140. *Sæpè contingit ut divifio citrà refiduum fieri nequeat, ut in exemplo fequenti: fit fractio* $\frac{8}{9}$ *unius exapedæ, cujus inveftigetur valor. Juxtà methodum traditam, multiplicandum eft 6 per numeratorem 8, quia exapeda fex continet pedes, deindè dividendum productum 48 per denominatorem 9: reperietur in quoto 5* + *fractio* $\frac{3}{9}$; *confequenter* $\frac{8}{9}$ *exapedæ unius æquivalet 5 pedibus* + $\frac{3}{9}$ *unius pedis. Ultima hæc fractio* $\frac{3}{9}$ *unius pedis poteft ulteriùs in pollices reduci eâdem methodo: ad hoc autem multiplicandum 12 per numeratorem 3, quia pes 12 pollices complectitur, dividendumque productum 36 per 9: quotus erit 4: itaque fractio* $\frac{3}{9}$ *pedis æquivalet 4 pollicibus; confequenter prima fractio* $\frac{8}{9}$ *exapedæ unius, æquivalet 5 pedibus cum 4 pollicibus.*

PROBLEMA VI.

141 *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1°. Si denominator idem fuerit, numeratores in unicam fummam collige, huicque fummæ denominatorem communem fubjice, habebis fractionem quæ erit fumma quæfita: fint in exemplum fequentes fractiones in unicam fummam colligendæ $\frac{2}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$: dico quòd illæ fractiones = $\frac{14}{16}$.

2°. Si diversus fuerit fractionum denominator, fractiones propositas ad eamdem denominationem revoca: (132) tum, ut modò dictum est, numeratores adde: v. g. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4} = \frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20} = \frac{23}{20}$.

3°. Si integra fractionibus addenda proponantur: integra integris adde: tum fractiones fractionibus addes, ipsis ad eamdem denominationem, si fuerit opus, priùs reductis: v. g. addideris $12 + \frac{2}{5}$ cum $15 + \frac{4}{7}$, accipiendo summam integrorum, quæ est 27, & postmodùm addendo fractiones, ad eumdem denominatorem priùs reductas: id est, $12 + \frac{2}{5}$ & $15 + \frac{4}{7} = 27 + \frac{34}{35}$.

Litteraliter duæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$, prout evidenter patet.

PROBLEMA VII.

142. *Fractiones subtrahere.*

RESOLUTIO.

1°. Si denominator idem fuerit, subtrahe numeratorem fractionis subtrahendæ, ex alterius fractionis numeratore: tùm residuo subjice denominatorem communem & absoluta erit operatio: v. g. si subtrahere velis $\frac{4}{9}$ ex $\frac{7}{9}$, subtrahe 4 ex 7, & remanebunt $\frac{3}{9}$.

2°. Si diversa fuerit denominatio, unamquamque fractionem ad eandem denominationem revoca, (132) cæteraque absolve prout modò dictum est: v. g. si subtrahere velis $\frac{3}{4}$ ex $\frac{4}{5}$, utramque hanc fractionem ad eumdem denominatorem revoca, nimirùm ad $\frac{15}{20}$ & $\frac{16}{20}$: tùm subtrahe 15 ex 16, & residuo 1 subjice denominatorem 20, tuncque habebis residuum quæsitum $\frac{1}{20}$.

Ubi fractiones sunt litterales, eâdem ratione operandum: v. g. ex fractione $\frac{a}{b}$ subtrahenda, supponatur hæc altera $\frac{c}{d}$: omnibus, ut modò præscriptum est, peractis, aderit $\frac{ab - cb}{bd}$, quod est residuum seu differentia ambarum fractionum.

3°. Si subtrahere velis integrum & fractionem ex integro & fractione; integrum ex integro, & fractionem ex fractione subtrahe: v. g. ad subtrahendum $9 + \frac{2}{5}$ ex $12 + \frac{3}{4}$, detraho 9 ex 12, tùm duas fractiones $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ ad eumdem denominatorem revoco, (132) & postmodùm primam ex secundâ subtraho; residuum integrorum & fractionum est $3 + \frac{7}{20}$. Quòd si fractio numeri subtrahendi major fuisset fractione numeri alterius, inchoanda fuisset operatio reducendo unitatem numeri 12 in fractionem ejusdem denominationis ac $\frac{3}{4}$, deindè, addenda fuisset nova hæc fractio fractioni $\frac{3}{4}$, & reliqua ut antè.

PROBLEMA VIII.

143. *Fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO.

1°. Si multiplicanda proponatur fractio per integrum, tantummodò fractionis numeratorem per integrum multiplica, eodem manente denominatore: v. g. $\frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5}$.

2°. Si per invicem multiplicandæ sint duæ fractiones, non modò numeratores, sed & ambos denominatores per invicem multiplica: v. g. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{30}$. Eadem adhibenda methodus in multiplicatione fractionem litteralium: unde 1°. $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$. 2°. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

3°. Ad multiplicandum integrum & fractionem per integrum & fractionem, reducendus est multiplicandus ad unicam fractionem, reducendus quoque multiplicator ad aliam fractionem: tùm novæ illæ fractiones per se invicem multiplicandæ sunt: v. g. ad multiplicandum $8 + \frac{3}{4}$ per $7 + \frac{2}{5}$.

1°. Reducendus est multiplicandus in fractionem: quamobrem statim reduco 8 in fractionem, quæ eundem habeat denominatorem ac $\frac{3}{4}$ & invenio $\frac{32}{4} = 8$: tùm addo $\frac{3}{4}$ cum $\frac{32}{4}$ summa $\frac{35}{4}$ est multiplicandus totalis. 2°. Pariter reduco multiplicatorem ad unicam fractionem $\frac{37}{5}$. 3°. Multiplico $\frac{35}{4}$ per $\frac{37}{5}$: productum est $\frac{1295}{20}$, quod potest, mediante divisione, reduci in integrum.

SCHOLION I.

144. *Ubi in fractionum multiplicatione multiplicator unitate minor est, productum est quoque minus multiplicando: v. g.* $\frac{1}{3}$ *multiplicatum per* $\frac{2}{4}$ *dat in producto fractionem* $\frac{2}{12}$, *quæ minor est quàm* $\frac{1}{3}$: *fractio enim* $\frac{2}{12}$ *non æquivalet* $\frac{1}{3}$: *ad hoc enim requireretur ut adesset* $\frac{4}{12}$: *hujus autem ratio est quòd, quò minor est multiplicator, eò minus sit productum: porrò si fiat multiplicatio per unitatem, productum æquale est multiplicando: ergo si fiat multiplicatio per numerum unitate minorem, productum necessariò erit multiplicando minus.*

SCHOLION II.

145. *Per multiplicationem reducuntur fractiones fractionum ad fractiones simplices. Sit in exemplum fractio composita vel fractio fractionis,* $\frac{3}{5}$*æ partes* $\frac{4}{6}$ *partium, ut intelligamus quid ipsa exprimat, eam casui particulari applicemus, quærendo v. g. quanti valeant tres quintæ partes quatuor sextarum partium nummi unius. 1°. 4 sextæ partes hujus nummi sunt 40 asses. 2°. Tres quintæ partes 40 assium sunt 24 asses; igitur 3 quintæ partes 4 sextarum partium unius nummi sunt 24 asses: itaque nunc reducamus prædictam fractionem compositam ad fractionem simplicem: id porrò præstiterimus, si multiplicaverimus* $\frac{4}{6}$ *per* $\frac{3}{5}$: *productum enim* $\frac{12}{30}$ *est fractio simplex, quæ prædictæ fractionis compositæ valorem exprimit. Id evidens est in casu posito: quoniam enim trigesima pars nummi sunt 2 asses, sequitur quòd 12 trigesimæ partes nummi ejusdem sint 24 asses.*

Si plures quàm duæ occurrerent fractiones, essent quoque per se invicem multiplicandæ, ut ad unicam reducerentur fractionem.

PROBLEMA IX.

146. *Fractiones dividere.*

RESOLUTIO.

1°. Si fractio per numerum integrum sit dividenda: examinandum an fractionis numerator exactè & sine residuo per integrum dividi queat, an non. Si possit, tunc, intacto denominatore, numerator per integrum dividatur: sic fractio $\frac{12}{3}$ divisa per $6 = \frac{2}{3}$: si numerator non possit exactè dividi per integrum, tunc per ipsum multiplicetur denominator, eodem manente numeratore: V. g. divisio sequentis fractionis $\frac{3}{4}$ per 6, fit multiplicando 4 per 6 & servando eundem numeratorem, unde quotus est $\frac{3}{24}$. Fractionem, in utroque casu, verè dividi per 6, exindè patet quot fractio fiat sexties minor; in 1° quidem, nam denominatore manente eodem, eo minor fit fractio, quo plus minuitur numerator. In 2° pariter, nam manente eodem numeratore, eo minor evadit fractio quo plus augetur denominator (53 & 56).

2°. Ad dividendam unam fractionem per aliam, multiplicandus est numerator fractionis quæ est dividenda per denominatorem illius fractionis, quæ est dividens: productum autem erit numerator quoti: deindè multiplicandus est denominator dividendi per numeratorem divisoris, erit verò productum denominator quoti v. g. si

dividere volueris $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, multiplicabis 2 numeratorem dividendi per 5 denominatorem diviſoris, productum verò 10 erit numerator quoti: poſtmodùm dividendi denominatorem 3 multiplicabis per diviſoris numeratorem 4: aderit productum 12 pro denominatore quoti, qui erit $\frac{10}{12}$. Pariter quotus fractionis $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ eſt $\frac{ad}{bc}$.

Hujus methodi ratio ſat facilè intelligitur; enim vero ſi dividi deberet $\frac{2}{3}$ per 4, quotus eſſet $\frac{2}{12}$ (ex mox probatis) ſed in allato exemplo hæc fractio dividi, non debet per 4 ſed per numerum quinquies minorem ſc. $\frac{4}{5}$ quare, quotus debet eſſe quinquies major, redditur autem talis, multiplicando numeratorem 2 primæ fractionis, per 5 denominatorem ſecundæ, proditque $\frac{10}{12}$.

3°. Si numerus integer per fractionem dividi debeat, reducendus eſt numerus integer in fractionem cujus denominator ſit unitas, tunc operatio peragenda ut in caſu præcedenti. Sic 6 dividitur per $\frac{3}{4}$ hoc modo $\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{24}{3} = 8$. Nec mirum videatur ſi quotus ſit dividendo major; eſt enim diviſor unitate minor: jam vero unitas eſt ad diviſorem ut quotus ad dividendum (86)

4°. Si numerus integer cum fractione, per integrum & fractionem dividi debeat, tunc totus dividendus ſeorſim in unicam fractionem reducitur & diviſor pariter, dein exortæ fractiones adinſtar fractionum ſimplicium dividuntur.

DE ELEVATIONE FRACTIONUM AD POTENTIAS.

147. Ad elevandam fractionem ad quadratum, elevandus tùm numerator, tùm denominator ad quadratum ſuum: itaque quadratum fractionis $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$. Pariter quadratum fractionis $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Si quæras fractionis alicujus cubum, eleva ad cubum, tam numeratorem quàm denominatorem: undè cubus fractionis $\frac{2}{5} = \frac{8}{125}$. Eodem proportionaliter modo de aliis ratiocinandum potentiis; ſive fractiones ſint numericæ, ſive litterales.

COROLLARIUM.

148. Ex anteà dictis (144) ſequitur quadratum, vel aliam quamcumque potentiam ſuperiorem fractionis propriè dictæ, id eſt, unitate minoris, fractione minorem eſſe: quadratum enim fractionis $\frac{1}{2}$, ſcilicet $\frac{1}{4}$, non eſt niſi dimidium primæ.

SCHOLION II.

149. *Quod ſpectat extractionem radicum in fractionibus; ipſa peragitur, aſſumendo radicem ſimilem numeratoris & radicem denominatoris: undè radix quadrata fractionis* $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$: *radix quarta fractionis* $\frac{16}{81} = \frac{2}{3}$.

OBSERVATIO.

150. Præter hactenùs recenſitas fractiones, aliæ ſunt vulgò decimales dictæ, quarum denominator ſemper eſt numerus ex unâ aut pluribus decadibus compoſitus, ſeu ex unitate & uno aut pluribus *zero*, tales ſunt numeri ſequentes, 10, 100, 1000, 10000 &c. Hæ fractiones paſſim adhibentur in tabulis tum Phyſicis, tum Mathematicis, tum Aſtronomicis. Harum fractionum ordinariè non ſcribitur denominator, notum quippè eſt ipſum ſemper componi ex unitate, & ex tot *zero*, quot ſunt numeri in fractionis numeratore; ſic fractio $\frac{256}{1000}$ hoc modo ſolet ſcribi: 0, 256. Cyphra 0, quæ numeratorem antecedit & ab ipſo per virgulam ſeparatur, indicat in fractione nullum reperiri numerum integrum; quod ſi quis occurreret is in loco *zero* apponeretur, v. g. $24 + \frac{425}{1000}$ ſic indicatur, 24, 425. Nonnunquam numerator unum aut plura habet *zero*, ante cyphras poſitivas, ut per ea indicetur quot *zero* in denominatore ſupponi debeant; ſic hæ fractiones $\frac{8}{100}$, $\frac{6}{1000}$, modo ſequenti indicantur. 0, 08. & 0, 006. Authores nonnulli fractiones decimales indicant ſcribendo numeratorem & apponendo deindè tot *zero* quot complectitur denominator, eaque à numeratore per punctum ſeparant; ſic 48.00, $= \frac{48}{100}$. Circa fractiones decimales eædem ac circa alias fiunt operationes. Sed cum denominator ſcribi non ſoleat, hæ fractiones adinſtar numerorum integrorum tractantur.

DE ÆQUATIONIBUS.

Æquatio (*quæ quidem est Algebræ anima*) *est duarum quantitatum æqualitas, seu est expressio relationis inter quantitates cognitas & quantitates incognitas. Quantitates cognitæ per primas exprimuntur alphabeti litteras*, a, b, c *&c. incognitæ verò per ultimas* t, u, x, y *&c. Igitur* t + u + a = a + b + y *est* æquatio : *prima quantitas* t + u + a *dicitur* primum æquationis membrum, *secunda verò* a + b + y *dicitur* secundum : *quantitates verò separatæ*, t, u, a, b, y, *vocantur* termini æquationis. *Vulgò creduntur æquationes quoddam includere mysterium, cujus secretum non nisi exiguo ingeniorum privilegiatorum circulo reservetur; verum opinio hæc præjudicii & naturalis hominum ignaviæ fœtus est, ut ex dicendis quidem patebit. Tota consistit æquationum ars in traducendis idiomate algebraico problematibus; imponendo scilicet nomina litteralia quantitatibus tùm cognitis tùm incognitis, quæ problemata ingrediuntur, & deindè per has litteras exprimendo relationes, quas inter se habent prædictæ quantitates. Quisquis autem eò pervenerit, ut prædictas relationes determinare valeat, æquationes vel difficillimas resolvere poterit, eritque generaliter Algebrista reputandus. Æquationes variorum distinguuntur, graduum, scilicet primi, secundi, tertii, quarti &c. prout quantitas ignota ad primam, ad secundam, ad tertiam &c. potentiam evecta est : igitur æquatio est primi gradûs, ubi incognita evecta est ad primam potentiam; talis est æquatio* ax + b = c; *est verò secundi gradûs ubi incognita ad secundam potentiam evecta est, hujusmodi est æquatio* xx + ax = c *&c. æquationes primi gradûs dicuntur* simplices, *aliæ dicuntur* compositæ, *in hoc compendio æquationes simplices solummodò trademus.*

DE VARIIS OPERATIONIBUS IN ÆQUATIONUM RESOLUTIONE ADHIBENDIS.

1. Ad resolvendam æquationem, variæ adhibendæ operationes, ità ut tamen primum æquationis membrum secundo æquale semper remaneat. Sunt autem hæ, additio, subtractio, multiplicatio, divisio, & substitutio. Quo in casu iis operationibus utendum sit, jam exponendum.

2. Utendum additione, ubi transferenda est quantitas negativa ex uno membro in aliud : v. g. si in æquatione $ax - 2b = 4\ cy + d$, transferre volueris $-\ 2b$ in secundum membrum, statim addendum est $+\ 2b$ in utroque membro; quod dabit $ax - 2b + 2b = 4\ cy + d + 2b$. Porrò in primo membro duæ quantitates $-\ 2b$ & $+\ 2b$ sese invicem destruunt; (Alg. 13.) igitur æquatio prædicta ad hanc reducitur $ax = 4\ cy + d + 2b$. Ex quo colliges quòd ad transferendam quantitatem negativam, tantùmmodò delenda sit in membro, in quo reperitur, & scribenda in altero cum signo +. Evidens est per hanc operationem non destrui æqualitem, quæ erat inter utrumque membrum, siquidem utrique membro eadem additur magnitudo.

3. Subtractione utendum, ubi transferenda est quantitas positiva ex uno membro in aliud : v. g. si habueris æquationem $3y + b = d$, atque transferre volueris $+\ b$ in secundum membrum; ex quolibet membro subtrahe b, habebis $3y + b - b = d - b$. Atqui $+\ b$ & $-\ b$ sese destruunt invicem in primo membro (Alg. 13.) : ergò æquatio prædicta ad hanc reducitur $3y = d - b$. Undè ad transferendam quantitatem positivam, delenda est in membro, in quo reperitur, scribendaque in altero cum signo $-$; quod utriusque membri non destruit æqualitatem, siquidem ex utroque eadem subtrahitur magnitudo.

4. Multiplicatio in æquationibus adhibenda est

ubi aliqua occurrit fractio, quæ eliminanda est. Ad hoc porrò multiplicandi sunt singuli æquationis termini per denominatorem fractionis eliminandæ: sit æquatio $\frac{x}{a} + b = z - d$, ex quâ eliminanda est fractio $\frac{x}{a}$: multiplicandi sunt singuli æquationis termini per denominatorem a, aderitque æquatio hæc $\frac{ax}{a} + ab = az - ad$: atqui $\frac{ax}{a} = x$ (Alg. 32. Reg. 3.) igitur ultima æquatio ad hanc reducitur $x + ab = az - ad$. Generaliter itaque dici potest quòd ad eliminandam fractionem, præcisè multiplicandi sint singuli æquationis termini per hujus fractionis denominatorem, relicto numeratore loco fractionis.

5. Si plures in æquatione occurrant fractiones, statim una ex illis eliminanda est multiplicando singulos æquationis terminos per denominatorem hujus fractionis primùm eliminandæ; postmodùm multiplicanda est hæc æquatio, ex quâ eliminata est prima fractio, per denominatorem fractionis secundo loco eliminandæ & sic deinceps. Si æquatio $\frac{x}{a} + b = \frac{z}{c} - d$, ex quâ eliminandæ sint ambæ fractiones: statim singulos terminos multiplico per a: quod dat novam æquationem $x + ab = \frac{az}{c} - ad$, quam deindè multiplico per c, atque occurrit alia hæc æquatio $cx + acb = az - acd$, in quâ nulla ampliùs reperitur fractio. Evidens est autem omnibus his multiplicationibus non destrui æqualitatem seu æquationem, siquidem ambo membra, quæ sunt quantitates æquales, per eandem magnitudinem multiplicentur.

6. Divisio in æquationibus adhibetur ad expediendam quantitatem ignotam, quæ multiplicata occurrit per quantitatem notam: id porrò præstatur singulos æquationis terminos dividendo per quantitatem notam, quæ ignotam multiplicat: sit v. g. æquatio $ax + b = cd$, cujus quantitas incognita x multiplicatur per a: ut expediatur hæc quantitas ignota, atque sola constituat unum ex terminis æquationis, dividendi sunt omnes termini per a: quod dabit $\frac{ax}{a} + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$. Atqui $\frac{ax}{a} = x$ (Alg. 32. Reg. 3.) ergò æquatio prædicta fiet $x + \frac{b}{a} = \frac{cd}{a}$, ubi x solum est unus æquationis terminus: liquet igitur quod, ad expediendam quantitatem ignotam ex quantitate notâ, quæ eam multiplicat, relinquenda sit ignota sola pro uno ex terminis æquationis, & dividendi sint cæteri termini per quantitatem, quæ ignotam multiplicat: adsunt rursùs exempla: sit æquatio $3x - b = c + d$: ad expediendam ignotam x, dividendi sunt omnes æquationis termini per coefficientem 3, qui ignotam multiplicat, atque aderit $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$. Cujus quidem æquationis secundum membrum, scilicet, $\frac{c}{3} + \frac{d}{3}$, idem est ac $\frac{c + d}{3}$, quia ambæ fractiones $\frac{c}{3}$ & $\frac{d}{3}$, utpotè eumdem habentes denominatorem, in unicam reduci possunt, quæ denominatorem habeat communem, & cujus numerator sit summa numeratorum utriusque fractionis (141.) igitur æquatio $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ eadem est ac ista $x - \frac{b}{3} = \frac{c + d}{3}$. Denique ad expediendam ignotam x in æquatione $ax - cx = b + d$, observo ignotam x multiplicari per $a - c$, quandoquidem $ax - cx$ sit productum x per $a - c$, vel $a - c$ per x; quamobrem propositam æquationem dividendo per $a - c$, reducitur ipsa ad hanc $x = \frac{b + d}{a - c}$. Porrò facilè est intelligere quod per divisionem, quæ ad expediendam ignotam adhibetur, non destruatur æqualitas, siquidem dividuntur duæ quantitates æquales, nimirùm duo æquationis membra, per eumdem divisorem.

7. Substitutio, quæ in resolvendis æquationibus non exiguam præstat opem, in eo consistit ut apponatur valor incognitæ loco ejusdem incognitæ: si, v. g. adsint duæ æquationes $x + y = a$ & $x - y = d$, & substituendus sit in prima æquatione valor quantitatis x loco hujus incognitæ, accipiendus est valor iste in secundâ æquatione; quod præstatur reliquendo x solum in primo membro, eritque secunda æquatio $x = d + y$: igitur $d + y$ est valor ignotæ x: substituetur deindè $d + y$ loco ignotæ x in prima æqua-

tione ; aderitque $d + y + y = a$. Quòd si substituendus fuisset valor ignotæ y in secundâ æquatione propositâ, accipiendus fuisset valor ille in primâ æquatione, relinquendo y solum in primo membro ; quod dedisset $y = a - x$; quo peracto appositum fuisset $a - x$ loco ignotæ y in secundâ æquatione : verùm cùm y sit subtractum in hâc secundâ æquatione propter signum $-$, subtrahendum fuisset $a - x$: porrò fit subtractio mutando signa ; igitur scribendum fuisset $- a + x$ loco ignotæ y ; fuissetque secunda æquatio $x - a + x = d$.

Sint quoque duæ æquationes $x + m = y + b$ & $ax = c - d + y$: si substituendus sit in secundâ æquatione valor ignotæ x loco hujus ignotæ, accipiendus est valor iste in primâ æquatione, quæ sit $x = y + b - m$, apponendum deindè $y + b - m$ loco x in secundâ æquatione : sed cùm x multiplicetur per a in hâc secundâ æquatione, pariter multiplicandum est $y + b - m$ per a, aderitque productum $ay + ab - am$; igitur post substitutionem, secunda æquatio erit $ay + ab - am = c - d + y$.

Exponendæ sunt jam tres regulæ in problematum resolutione servandæ, in quibus prædictæ operationes applicantur pro casuum exigentiâ.

Sed anteà observa problemata alia esse determinata, alia indeterminata ; priora ea sunt in quibus tot sunt conditiones seu relationes assignatæ, quot sunt quantitates ignotæ. Posteriora verò ea sunt in quibus numerus quantitatum ignotarum excedit conditiones seu relationes datas. Problemata determinata primi gradûs unicam admittunt solutionem, indeterminata verò plures.

REGULA I.

8. Reducenda sunt problemata in æquationes, seu ex iis formandæ sunt æquationes. *Hîc opus, hîc labor est*, nulla enim est methodus fixa, quæ pro hujus regulæ applicatione præscribi possit ; uno verbo, hîc deficit ars, solusque supplere potest Algebristæ genius. Illud unum generaliter dici potest, sedulò attendendum esse tùm ad naturam, tùm ad conditiones problematis, ut detegantur variæ relationes, quæ sunt inter quantitates seu cognitas seu incognitas, quæque formandis æquationibus locum præbere possunt. Quot porrò instituendæ sunt æquationes in quolibet problemate ? Tot instituendæ sunt, quot occurrunt quantitates ignotæ, quotiescumque Problema propositum est determinatum, qualia sunt ea quæ mox in medium proferemus.

REGULA II.

9. Secunda hæc regula in eo consistit, ut nova inveniatur æquatio, ope priorum, quæ nonnisi unam contineat ignotam : porrò id præstatur substituendo valorem unius vel plurium ignotarum loco harum ignotarum. Accipiendus itaque valor unius ignotæ in unâ æquatione prout dictum est (7.) atque substituendus hic valor in aliis æquationibus eo modo, quo in iis reperitur hæc ignota ; id est, si ignota in iis addita reperiatur, valor per additionem substitui debet ; si ignota subtrahatur, valor ejus erit quoque subtrahendus ; si per aliquam magnitudinem multiplicata vel divisa occurrat ignota, valor ejus per eandem magnitudinem multiplicandus erit, vel dividendus, prout videri potest (7). Facilè autem intelliges quod si una dumtaxat in problemate occurrat ignota, locum non habeat secunda hæc regula, sed solùm prima & tertia.

REGULA III.

10. Ubi perventum erit ad unam æquationem, quæ nonnisi unam contineat ignotam, relinquenda est ignota hæc solitariè, seu sola, in uno membrorum ; magnitudines omnes cognitas in aliud membrum transferendo. Evidens est fore ut mediante hâc operatione innotescat quantitas ignota, quandoquidem æqualis futura sit quantitatibus notis. Quæ hùc usquè exposuimus, problematibus jam applicanda sunt.

PROBLEMA I.

11. *Petrus & Joannes certum habent nummorum numerum : supponitur autem quòd si Petrus quinque è suis nummis daret Joanni, numerus nummorum utriusque futurus esset æqualis : verùm si Joannes quinque è suis Petro daret, jam summa nummorum Petri tripla esset summæ residuæ Joannis : quot nummos habebat Petrus, quot Joannes ?*

RESOLUTIO.

1°. In hoc problemate duæ sunt incognitæ, scilicet numerus nummorum Petri, & numerus nummorum Joannis, adeoque (num. 8.) duæ formandæ sunt æquationes : appello x numerum nummorum Petri & y summam nummorum Joannis : quo posito sic ratiocinor : cum summa nummorum Petri sit x, ubi quinque ex iis Joanni dederit, residuum nummorum Petri erit $x - 5$, & numerus nummorum Joannis erit $y + 5$. Porrò

per primam problematis conditionem ; Petrus & Joannes totidem habebunt nummos, ubi primus quinque è suis secundo dederit; consequenter $x - 5 = y + 5$: æquatio hæc primam exprimit problematis conditionem. Alia jam instituenda æquatio, quæ ex secundâ problematis parte deducatur. Supponitur in hâc secundâ parte quòd Joannes quinque è suis nummis Petro det, igitur summa nummorum Joannis erit $y - 5$, summa verò nummorum Petri erit $x + 5$. Porrò per secundam problematis conditionem, ubi Joannes quinque nummos Petro dederit, tunc Petrus triplum habebit nummorum Joannis : consequenter $x + 5$ triplo majus est quàm $y - 5$; igitur ut $y - 5$ adæquet $x + 5$, seu ipsi æquale fiat; multiplicandum erit per 3 : atqui productum quantitatis $y - 5$ per 3 est $3y - 15$: ergò $3y - 15 = x + 5$. Itaque duæ æquationes, quæ problematis exprimunt conditiones sunt istæ, $x - 5 = y + 5$ & $3y - 15 = x + 5$.

2°. Conformiter ad regulam secundam, ope prædictarum æquationum, nova formanda est æquatio, quæ nonnisi unam ignotam contineat, ad hoc autem præstandum, in uno membrorum primæ æquationis sola relinquitur ex ignotis una, nimirùm x, ut ejus habeatur valor. Porrò ut sola in uno membro maneat ignota x, transferendum est $- 5$ in aliud membrum, & loco æquationis $x - 5 = y + 5$, aderit $x = y + 5 + 5$, (2.) vel $x = y + 10$; itaque valor quantitatis x est $y + 10$, qui valor substituendus est loco quantitatis x in secundâ æquatione $3y - 15 = x + 5$. Peractâ hâc substitutione reperietur $3y - 15 = y + 10 + 5$, vel $3y - 15 = y + 15$.

3°. Ad applicandam exemplo nostro regulam tertiam, resumenda est æquatio per secundam regulam inventa, scilicet $3y - 15 = y + 15$; atque primum transfero $- 15$ ex primo membro in secundum, aderitque $3y = y + 15 + 15$, (num. 2.) vel $3y = y + 30$; transferendo quoque y ex secundo membro in primum, habebo $3y - y = 30$, (3.) vel $2y = 30$. Denique cum y per 2 multiplicetur in primo ultimæ hujus æquationis membro, singulos terminos divido per 2, (num. 6.) ut ignota y in primo membro sola maneat; quâ divisione peractâ ultima æquatio reducitur ad hanc $y = 15$, quæ significat Joannes 15 nummos habuisse.

Ad dignoscendum jam quot haberet Petrus, substituendum 15 loco y in aliquâ æquatione, ubi reperiuntur ambæ incognitæ x & y. Itaque appono 15 loco y in primâ æquatione quæ est $x - 5 = y + 5$; quod dat æquationem sequentem, $x - 5 = 15 + 5$; vel $x - 5 = 20$: & translato $- 5$ in secundum membrum, ut x solum maneat in primo, adest $x = 20 + 5$, vel $x = 25$, quæ æquatio indicat Petrum habuisse 25 nummos. Duo hi numeri 25 & 15 perfectè respondent conditionibus problematis propositi, prout intelligere quisque facilè potest.

PROBLEMA II.

12. *Pastor quidam interrogatus quot haberet oves, respondit : si haberem insuper tertiam & quartam partem numeri ovium, quas habeo, & prætereà quinque ; haberem centum. Quot habebat oves?*

RESOLUTIO.

Appello x numerum ignotum ovium, a centum oves, quas habuisset Pastor addendo ignotæ x tertiam & quartam partem ejusdem x & quinque insuper : sic autem ratiocinor ad formandam æquationem, quoniam addendo numero ovium, quas Pastor habet, tertiam partem hujus numeri, deindè quartam partem & quinque prætereà, summa adæquaret 100, sequitur quòd $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = a$. Cum unica in hoc problemate occurrat incognita, unica quoque sufficit æquatio, neque hîc locum habet regula secunda. Quamobrem præparanda est æquatio, eliminando fractiones : tùm ad regulam tertiam transeundum.

Elimino igitur primam fractionem, totam æquationem multiplicando per denominatorem 3 (num. 4 & 5.) quod aliam hanc dat æquationem $3x + x + \frac{3x}{4} + 15 = 3a$: aliam fractionem pariter elimino, ultimam hanc æquationem multiplicando per denominatorem 4, & adest $12x + 4x + 3x + 60 = 12a$, vel $19x + 60 = 12a$: ergò $19x = 12a - 60$. Atqui $a = 100$: ergò $12a = 1200$, ergò $19x = 1200 - 60$, vel $19x = 1140$; verùm cùm x multiplicetur per 19 in primo membro, dividenda est æquatio tota per 19 (6.) ut x solum maneat in primo membro : porrò dividendo 1140 per 19, quotus est 60, consequenter aderit hæc æquatio $x = 60$, quæ indicat Pastorem prædictum habuisse 60 oves, qui numerus problematis conditionibus satisfacit, ut facilè videri potest.

PROBLEMA III.

13. *Deleto quodam exercitu, quarta pars excisa fuit, duæ quintæ partes in hostium potestatem venerunt, & 14000 homines, qui residuum erant exercitus, fugâ salutem quæsierunt: quæritur quot hominibus, antè certamen, conflatus fuerit exercitus?*

RESOLUTIO.

Unica in illo problemate occurrit ignota, ideoque unica sufficiet æquatio, quæ, juxtà problematis conditionem, erit $\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + a = x$.

Neglectâ igitur regulâ secundâ, eliminandæ sunt fractiones, ut tertia demùm regula applicetur. Elimino statim fractionem primam, multiplicando singulos æquationis terminos per denominatorem 4, & habeo æquationem sequentem $x + \frac{8x}{5} + 4a = 4x$, ex quâ elimino fractionem $\frac{8x}{5}$, multiplicando singulos terminos per denominatorem 5, occurrit $5x + 8x + 20a = 20x$; ergò $13x + 20a = 20x$; ergò $20a = 20x - 13x$, vel $20a = 7x$. Atqui $a = 14000$; ergò $20a = 280000$; ergò $280000 = 7x$, vel $7x = 280000$; & consequenter dividendo totam æquationem per 7, aderit $x = 40000$, id est, 40000 homines conflabant exercitum.

PROBLEMA IV.

14. *Datis duarum quantitatum summâ & differentiâ, invenire quantitates?*

RESOLUTIO.

Sit summa $= a$, differentia verò $= d$, quantitas major quæsita $= x$, minor verò $= y$.

Duæ in præsenti problemate occurrunt ignotæ, adeoque duæ efformari debent æquationes. Quoniam autem quantitates quæsitæ, simul sumptæ, summæ cognitæ æquales sunt, habetur hæc æquatio, $x + y = a$; quia insuper habetur earumdem quantitatum differentia, auferendo minorem ex majore, prodit etiam æquatio sequens, $x - y = d$. His peractis, sumendus valor quantitatis x in primâ æquatione, nempè $a - y$, ponendusque in secundâ loco ipsius x, prodibit tum nova hæc æquatio, $a - y - y = d$; seu $a - 2y = d$; proindè $a - d = 2y$; adeoque $y = \frac{a-d}{2}$; *idest* y, *seu quantitas minor æqualis est dimidiæ summæ, demptâ dimidiâ differentiâ.* Pariter si in primâ æquatione substituatur valor ipsius y in secundâ sumptus, nempè, $x - d$, prodibit sequens æquatio, $x + x - d = a$, ex quâ eruitur, $2x = a + d$; proindè $x = \frac{a+d}{2}$; id est, x *seu quantitas major æqualis est dimidiæ summæ & dimidiæ differentiæ.*

PROBLEMA V.

15. *Ætas trium hominum est 150 anni; primus habet duplum ætatis secundi; secundus, habet triplum ætatis tertii; quæritur ætas cujuslibet in particulari?*

RESOLUTIO.

Ætas tertii sit x, ætas secundi erit $3x$, & ætas primi $6x$; consequenter aderit æquatio $x + 3x + 6x = 150$, vel $10x = 150$; consequenter peragendo divisionem per 10, occurret $x = 15$; quod indicat juniorem habere 15 annos, consequenter secundus habet 45 annos & primus 90.

PROBLEMA VI.

16. *Tres habentur fontes, quorum primus vas quoddam replet intrà horas tres, secundus intrà quatuor, tertius verò intrà sex: quæritur intrà quod temporis intervallum tres hi fontes simul effluentes vas prædictum repleturi sint?*

RESOLUTIO.

Evidens est quod primus fons tertiam vasis partem intrà horam unam repleturus sit, secundus quartam partem intrà idem tempus, tertius verò sextam partem: tres illæ vasis partes exprimuntur per fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, quæ reducendæ sunt ad eundem denominatorem, ut simul addantur: ad hoc ambos cujusque fractionis terminos multiplico per productum denominatorum duarum aliarum, & reperio $\frac{24}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{12}{72}$, quarum summa est $\frac{54}{72}$, quæ indicat tres fontes simul effluentes

intrà horam repleturos esse partem vasis; quæ designatur per fractionem $\frac{54}{72}$. Dico igitur: si pars vasis expressa per $\frac{54}{72}$ intrà horam repleatur, intrà quòd temporis intervallum replebitur vas integrum, quod designandum est per fractionem $\frac{72}{72} = 1$? Instituo igitur proportionem $\frac{54}{72} . \frac{72}{72} :: 1 . \text{hora } x$.

Porrò ubi duæ fractiones eumdem habent denominatorem, sunt inter se ut numeratores (Alg. 135.) igitur proportio præcedens potest in hanc mutari $54 . 72 :: 1 . x$: ergò productum extremorum $54x$ æquale est producto mediorum 72; ergò $x = \frac{72}{54}$; consequenter $x = 1 + \frac{18}{54}$, vel $x = 1 + \frac{1}{3}$; quod indicat vas repletum iri à tribus fontibus simul effluentibus intrà horam & horæ trientem, sive intrà horam & viginti minuta.

PROBLEMA VII.

17. *Petrus obvios habuit pauperes: unicuique illorum quatuor asses porrigere volebat, verum ad talis summæ porrectionem deerant duo asses; quamobrem tres tantummodò asses singulis porrexit, & quinque habuit residuos: quæritur quot habuerit asses in bursâ, & quot pauperes obvios habuerit?*

RESOLUTIO.

Appello x numerum pauperum, & y numerum assium: quo posito sic ratiocinor: quoniam, si Petrus duos insuper asses habuisset, unicuique pauperi quatuor asses dare potuisset, sequitur quòd addendo 2 ignotæ y, summa $y + 2$ futura sit quater major quàm x, quod est numerus pauperum, consequenter $y + 2 = 4x$. Aliundè per secundam problematis conditionem, Petrus datis cuilibet pauperi tribus assibus, quinque habuit residuos; consequenter subtrahendo 5 ex y, residuum $y - 5$ ter majus erit quàm x; igitur $y - 5 = 3x$: duæ itaque problematis æquationes sunt $y + 2 = 4x$ & $y - 5 = 3x$. Atque hæc est applicatio primæ regulæ (8.). Adest applicatio secundæ: quoniam $y + 2 = 4x$; ergò $y = 4x - 2$, (3): in secundâ problematis æquatione substituo valorem ignotæ y, scilicet $4x - 2$, & invenio $4x - 2 - 5 = 3x$; vel $4x - 7 = 3x$. Tum statim regulam tertiam applico: quoniam $4x - 7 = 3x$; ergò $4x = 3x + 7$; ergò $4x - 3x = 7$; ergò $x = 7$; quæ ultima æquatio indicat septem fuisse pauperes.

Ad dignoscendum assium numerum, appono 7 loco x in primâ æquatione & invenio $y + 2 = 28$; ergò $y = 28 - 2$, vel $y = 26$: ergò Petrus 26 asses habebat. Evidens est quòd pauperum numerus 7, & assium numerus 26 problematis satisfaciant conditionibus.

PROBLEMA VIII.

18. *Cognitâ distantiâ duorum corporum mobilium, quæ in eâdem lineâ moventur, & quæ in se invicem incurrere debent; cognitâ quoque velocitatum relatione, invenire punctum incursionis. Supponitur autem quòd duo hæc corpora simul incipiant moveri.*

RESOLUTIO.

Sit d distantia cognita duorum mobilium A & B in eâdem lineâ motorum cum velocitatibus, quæ sint inter se ut 2 & 5: vel duo hæc corpora versùs eamdem partem tendunt, ità ut corpus majori velocitate donatum sit à tergo alterius; vel progrediuntur versùs se invicem; uterque casus specialem exigit solutionem.

Primus casus. Corpus A, quod præit cum velocitate per 2 denotatâ, certam percurrit longitudinem, quam appello x, antequam attingatur à corpore B. Hoc corpus B, quod sequitur cum velocitate 5, statim percurrit distantiam d inter duo corpora comprehensam + longitudinem x eodem tempore, quo A solum percurrit x: inveniendum hoc spatium x, in cujus extremitate fit corporum offensio. Ad hoc autem, attendo quòd velocitates sint inter se ut spatia eodem tempore percursa: si corpus aliquod duplo majorem habeat velocitatem quam aliud, eodem tempore duplò majus percurret spatium; aderit igitur hæc proportio, velocitas corporis B est ad velocitatem corporis A, ut $d + x$ est ad x; vel $5 . 2 :: d + x . x$: igitur $5x = 2d + 2x$ (Alg. 75.) ergò $5x - 2x = 2d$, vel $3x = 2d$; consequenter $x = \frac{2d}{3}$, seu $\frac{2}{3}$ distantiæ d; hoc est, ubi corpus B incurret in corpus A, spatium à corpore A percursum comprehendet duos trientes distantiæ, quæ ab initio erat inter ambo corpora.

Ex ultima æquatione $x = \frac{2d}{3}$ sequitur *numerum quæsitum* x, *in præsenti casu, æquare productum distantiæ cognitæ per minorem velocitatem, divisum per differentiam velocitatum.*

Secundus casus. Inveniendum quam partem x distantiæ d corpus A percurrerit, ubi corpora in se incurrent: observo quòd corpus B percurret $d - x$, quæ est alia pars distantiæ d, eo tempore quo corpus A percurrerit x quare aderit proportio, velocitas corporis B est ad velocitatem corporis A ut $d - x$ est ad x, vel $5 . 2 :: d - x . x$: ergò $5x = 2d - 2x$: (Alg. 75.) ergò $5x + 2x = 2d$, vel $7x = 2d$; ergò $x = \frac{2d}{7}$, seu $\frac{2}{7}$ distantiæ d: hoc est, corpus A percurrerit $\frac{2}{7}$ distantiæ d ubi duo corpora in se incurrent.

Ex postremâ æquatione $x = \frac{2d}{7}$ sequitur *numerum quæsitum* x, *in præsenti casu, æquare productum distantiæ cognitæ per minorem velocitatem, divisum per summam velocitatum.*

PROBLEMA IX.

19. *Duo homines, quorum unus celeriùs alter lentiùs graditur, in eodem loco siti, eodem instanti ad locum* B *pervenire volunt: quæritur, datâ velocitatum relatione, necnon termini* B *distantiâ, quantam spatii partem percurrere debeat homo lentior, priusquam alius iter aggrediatur?*

RESOLUTIO.

Sit locorum distantiâ $d = 300$ exap., velocitas major $= 9$, minor vero 6.

Appello x spatii partem emetiendam ab homine lentiore priusquam alius iter aggrediatur. Homo velocior percurret integrum spatium d tempore quo lentior spatium $d - x$ emetietur: quoniam autem velocitates cognitæ sunt inter se ut spatia emensa exurget sequens proportio, $9 . 6 :: d . d - x$, ex quâ, per multiplicationem, prodit hæc æquatio, $9d - 9x = 6d$; ergo $9x = 3d$ consequenter $x = \frac{3d}{9} = 100$ exap. undè spatium emetiendum ab homine lentiore priusquam velocior iter ineat, est 100 exapedarum.

Ultima æquatio $x = \frac{3d}{9}$, problematis solutionem complectens indicat *quantitatem quæsitam* x *æqualem esse producto distantiæ notæ per differentiam velocitatum, diviso per velocitatem majorem.*

Facilè intelligitur tum ex methodo in trium postremorum problematum resolutione adhibitâ, tum ex theoriâ in iisdem traditâ, quomodo infinita ut ita dicam, proponi & resolvi queant jucunda & utilia circa motum problemata.



DE GEOMETRIA.

Geometria est scientia extentionis, quæ corporibus penès dimensionem trinam longitudinis, latitudinis aut profunditatis competere potest. Geometriam in Ægypto natam esse arbitrantur plurimi. Unum certum est, Thalem Miletanum *ab Ægypto apud Græcos Geometriam attulisse, quam à Sacerdotibus Memphis didicerat. Dùm verò* Thales *in Græciâ Geometriæ quâdamtenùs evolvebat germen, magnus* Pythagoras, *lectionum ejus auditor, adultus fiebat, brevique, sub tanto Magistro, tantùm profecit, ut rapidi progressus Discipuli Magistrum terruerint. Secedens postmodùm in Ægyptum* Pythagoras *tantâ illic vi Geometriæ exposuit principia, ut scientia hæc magno in honore confestim habita fuerit. Exorti postmodum viri omni præconio majores*, Hyppocrates *scius*, Democritus, Plato, Leo, Architas, Aristæus, Geminus, *egregius* Euclides, *immortalis* Archimedes, *sublimis* Cartesius, *& alii benè multi, qui prædictam scientiam infinitè propèmodum auxerunt, ditârunt, illustrârunt, eamque tandem viri incomparabiles* Newtonus & Leibnitzius *ad summum perfectionis apicem perduxerunt, ultrà quem progredi vix in humanâ videatur potestate positum. Non sinunt cursûs Philosophici angustiæ ut amplos Geometriæ thesauros vobis pandamus; satis itaque à nobis præstitum esse videbitur, si generaliora ejus principia, unà cum Trigonometriæ planæ elementis, vobis exposuerimus. Prænotate verò longitudinem sine latitudine & profunditate spectatam dici* lineam, *longitudinem cum latitudine*, superficiem, *longitudinem demùm cum latitudine & profunditate*, solidum, *seu*, corpus *appellari.* Punctum *autem dicimus, illud quod tanquam partibus, adeòque & extensione carens spectatur.*

CAPUT PRIMUM.

DE LINEIS.

DEFINITIO PRIMA.

1. *Linea recta* est cujus singula puncta sunt in eâdem directione: talis est linea AB. (fig. 1ª.) Quod si puncta omnia non sint in eâdem directione, linea dicitur *curva*: tales sunt lineæ AEB. & ADB. ejusdem fig. Linea partim recta, partim curva, vocatur *mixta*: talis est linea ABCD. (fig. 2ª.) Evidens est ab uno puncto in aliud nonnisi unam duci posse lineam rectam, eandemque esse mensuram exactam distantiæ inter duo quævis puncta. Nomine *plani* intelligunt Geometræ superficiem politam, quæ nec elavata, nec depressa, nec curva est.

DEFINITIO II.

2. *Circulus* est figura plana terminata per lineam curvam, cujus singula puncta æqualiter distant à puncto quodam medio, quod dicitur *centrum*: linea terminans dicitur *circumferentia*, seu *peripheria*: quævis pars peripheriæ dicitur *arcus*, igitur AD, EIF, GLH (fig. 3ª.) sunt arcus. Quælibet recta ut EF, undique per circumferentiam terminata, vocatur *chorda* vel etiam *subtensa*. Si chorda per centrum transeat, *diameter* appellatur, tale est AB. Linea à centro ad peripheriam ducta, dicitur *radius*, ut CD, CA, CB. Circuli cujuslibet peripheriam dividunt Geometriæ in 360 partes æquales, quas vocant *gradus*. Quilibet gradus dividitur in 60 partes æquales quæ dicuntur *minuta*; quodlibet minutum in 60 partes æquales quæ dicuntur *minuta secunda &c.* Gradus designantur per (°), minuta prima per ('), minuta secunda per ("), minuta tertia per (''') &c.

PRINCIPIA.

3. Omnes radii alicujus circuli sunt æquales; centrum enim ab omnibus peripheriæ punctis æqualiter distat. Omnes diametri sunt quoque æquales, quælibet enim diameter ex duobus componitur radiis. In duobus circulis æqualibus,

æqualibus; radii & diametri unius æquales sunt radiis & diametris alterius. Omnes diametri circulum & peripheriam dividunt in duas partes æquales; cùm enim singula peripheriæ puncta æqualiter à centro distent, peripheriæ illius curvatura est uniformis, seu, ubique æqualis; proindè quemcumque situm habuerit diameter, circulum & peripheriam in duas partes æquales secat. In eodem circulo, aut circulis æqualibus, chordæ æquales sustinent arcus æquales, & vice versâ arcus æquales chordis æqualibus sustinentur. V. g. Si chordæ EF & GH (fig. 3ª) sint æquales, necesse est ut arcus EIF & GLH, quos sustinent, sint quoque æquales, & vicissim. Id oritur ex uniformi peripheriæ curvaturâ.

OBSERVATIO.

4. Omni vel leviter attendenti perspicuum fit 1°. lineam quamlibet sive rectam, sive circularem posse circuli peripheriam secare in punctis duobus, nusquam autem in tribus. 2°. Sufficere tria puncta in directum non jacentia ad detrandam unius peripheriæ ejusque centri positionem; siquidem unicum dari possit punctum æqualiter dissitum à tribus punctis in diversâ directione positis; & aliundè eadem sit curvedo in omnibus unius peripheriæ punctis, eademque à centro distantia. Observa insuper plures circumferentias ex eodem centro descriptas dici concentricas, excentricas autem ubi diversa sunt centra.

PROBLEMA PRIMUM.

5. *Invenire lineam rectam cujus punctum quodlibet, seorsim sumptum, æqualiter distet à punctis datis* A & B (fig. 4.).

RESOLUTIO.

È punctis datis A & B, tamquam centris, describantur, cum eâdem circini aperturâ, duo arcus sese intersecantes in D & C: tunc punctum D à punctis A & B æqualiter distabit, nimirum quantitate radii circulorum æqualium: eâdem ratione punctum C æqualiter ab iisdem punctis erit dissitum. Postmodum si ducatur linea recta per puncta D & C transiens, quælibet hujus lineæ puncta, seorsim sumpta, utpotè in eâdem directione posita, ac duo priora, æquali quantitate distabunt à punctis A & B; ita ut si è quolibet prædictæ lineæ puncto *m*, vel M, cum certâ circini aperturâ, attingatur punctum A; cum eâdem pariter attingetur punctum B.

SCHOLION.

6. *Ex resolutione præcedentis problematis eruitur methodus dividendi lineam quamlibet datam in duas partes æquales; si enim ex utraque illius extremitate, cum eâdem circini aperturâ describantur duo arcus sese in punctis duobus intersecantes, linea per puncta intersectionis ducta priorem in duas partes æquales dividet* (5).

PROBLEMA II.

7. *Per data tria puncta in directum non jacentia* A, B & C (fig. 5.) *peripheriam describere?*

RESOLUTIO.

Ope præcedentis problematis, duc lineam EF, cujus puncta quælibet, seorsim sumpta, æqualiter distent à punctis A & B. Deindè duc pariter lineam GH, cujus punctum quodvis seorsim æqualiter distet à punctis B & C; porrò si è puncto intersectionis harum linearum R, tamquam centro, mediante radio RA, describatur peripheria, transibit per puncta data A, B & C.

DEMONSTRATIO.

Cum peripheria integra determinetur per tria puncta in directum non jacentia (4); demonstrata erit resolutionis veritas, si ostendatur punctum R æqualiter distare à punctis A, B & C, adeoque esse centrum arcûs per ipsa transeuntis: atqui id facilè probatur; nam 1°. punctum R æqualiter distat à punctis A & B, cum sit pars rectæ EF, cujus puncta quælibet, seorsim, ab iisdem punctis æqualiter distant (5): 2°. Idem punctum R, utpotè pars rectæ GH, æqualiter etiam distat à punctis B & C; consequenter punctum R æqualiter distat à tribus punctis datis A, B & C. Undè verè solutum est problema.

PROBLEMA III.

8. *Invenire centrum circumferentiæ, vel arcûs cujuscumque?*

RESOLUTIO.

Sumantur in circumferentiâ, vel arcu, tria

puncta diversa A, B & C; dein, per problema præcedens, quæratur centrum peripheriæ per hæc puncta transeuntis, & resolutum erit problema; ut intelligitur ex demonstratione præcedenti.

OBSERVATIO.

9. Duæ lineæ simul collatæ sunt vel parallelæ, vel perpendiculares, vel obliquæ. Si autem spectentur relativè ad circulum sunt vel tangentes vel secantes. Hæ omnes seorsim sunt definiendæ. Dein agemus de angulis quas efformant lineæ sibi mutuò occurentes.

DEFINITIO III.

10. Lineæ *parallelæ* sunt quæ æqualiter ubique distant, seu quarum puncta correspondentia eandem jugiter, distantiam servant; undè in infinitum productæ nusquam concurrerent. Tales sunt lineæ CD & AB (fig. 6.).

DEFINITIO IV.

11. Linea *perpendicularis* est quæ alteri ità insistit, ut neque in hanc, neque in illam partem inclinetur. Talis est linea DC (fig. 19.). Hinc 1°. ex puncto eodem unica in lineam datam erigi potest perpendicularis: si enim duceretur 2ª, hæc ad 1æ dextram, vel sinistram, caderet; adeoque in unam partem, plus quam in aliam, inclinaretur. 2°. Perpendicularis brevior est obliquâ ex eodem puncto in eandem lineam ductâ; enim vero si, in fig. 7, producatur perpendicularis CD usque ad punctum H, & ducatur obliqua HB, obliquæ CB æqualis; perspicuum fit lineam rectam CDH breviorem esse, quam fracta CBH; ergò media pars rectæ brevior est mediâ parte fractæ. 3°. Linea alteri perpendicularis est, quotiescumque duo prioris puncta quævis æqualiter distant à duobus punctis posterioris; tunc enim 1ª ita 2æ insistit, ut in neutram partem inclinetur (5). 4°. Si linea A sit lineæ B perpendicularis, erit quoque linea B perpendicularis lineæ A, ut ex dictis liquet. 5°. Tandem linea perpendicularis vera est mensura distantiæ inter duos terminos; quare perpendiculares, inter parallelas easdem ductæ, æquales sunt; cum parallelarum distantia ubique eadem sit.

DEFINITIO V.

12. Linea *obliqua* est recta alteri sic insistens ut in unam partem plus quam in aliam inclinetur. Talis est linea FK (fig. 8.).

DEFINITIO VI.

13. *Tangens* dicitur linea recta quæ sic peripheriam tangit, ut ultra punctum contactûs producta peripheriam non secet. Talis est linea ABC (fig. 9.).

DEFINITIO VII.

14. *Secans* vocatur linea recta quæ è puncto extra circulum posito, intra eundem producitur; ut EB & EC (fig. 47.) vel è puncto intra circulum sito, extra ipsum prolongatur: tales sunt lineæ AB & AD (fig. 9.). Secantis etiam nomine donatur linea recta parallelas secans. Ut EF (fig. 20.)

THEOREMA PRIMUM.

15. *In circulo quocumque, 1° omnis diameter vel radius chordæ perpendicularis chordam, sicut & arcum quem subtendit, in duas partes æquales dividit. 2°. Omnis diameter vel radius, chordam in duas partes æquales dividens, eidem est perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

1°. Quoniam punctum unum diametri AMC vel radii MC (fig. 46.) reperitur in centro M æqualiter dissito à punctis extremis D & E chordæ DE, & aliundè diameter AMC, vel radius MC, eidem chordæ perpendiculariter insistit; necessè est ut cætera diametri, vel radii, puncta, seorsim sumpta, æqualiter etiam distent à prædictis punctis D & E (11); quare punctum B æqualiter distabit ab iisdem punctis D & E, adeoque erit BD = BE; & ob eandem rationem arcus CD = CE. Q. E. 1um.

2°. Si eadem diameter, vel idem radius chordam eandem in duas partes æqualiter dividat, duo erunt diametri vel radii puncta seorsim æqualiter à punctis D & E dissita, adeoque erit diamerer, vel radius, chordæ DE perpendicularis (11). Q. E. 2um.

DEFINITIO VIII.

16. *Angulus* est apertura inter duas lineas quæ in uno puncto sibi invicem occurrunt; talis est apertura inter duas lineas CA & CB (fig. 10.). Punctum occursûs dicitur *vertex* anguli. Lineæ verò quæ mutuo occursu angulum formant, vocantur *latera*, vel *crura* anguli. Angulus vel per

unicam litteram in vertice positam ; vel per tres litteras indicari potest, ità tamen ut medio loco pronuncietur, quæ vertici adscribitur. Angulus per respectum ad latera dividitur in *rectilineum*, *curvilineum & mixtilineum* : *rectilineus* erit, si crura fuerint lineæ rectæ ; *curvilineus*, si lineæ curvæ ; *mixtilineus* tandem si crus unum fuerit linea recta, aliud verò linea curva.

OBSERVATIO I.

17. Anguli alicujus magnitudo non pendet à laterum longitudine, sed ab eorum dumtaxat inclinatione seu aperturâ ; ideòque angulus *a*C*b* æqualis est angulo ACB, seu potiùs, idem est angulus, quamvis duo latera C*a* & C*b* lateribus CA & CB breviora sint.

OBSERVATIO II.

18. Angulus ut ACB, qui in centro circuli verticem habet, arcum AB inter sua crura comprehensum pro mensurâ habet. Evidens enim est arcum hunc fieri majorem vel minorem eâ proportione, quâ laterum apertura major est vel minor. Porrò à solâ laterum aperturâ pendere anguli quantitatem modò ostensum est. Patet igitur anguli mensuram esse arcum inter crura comprehensum, qui anguli verticem pro centro habet.

DEFINITIO IX.

19. Angulus *rectus* est qui arcum 90 graduum, seu quadrantem peripheriæ, pro mensurâ habet, talis est angulus DCB (fig. 11.). Hinc omnes anguli recti sunt æquales. Angulus *obtusus* est qui mensuratur per arcum quadrante peripheriæ majorem ut DCA (fig. 12.). *Acutus* tandem est cujus mensura quadrante peripheriæ minor est. Talis est angulus DCB. Duo posteriores communi nomine *obliqui* dicuntur. Quod angulo acuto addi debet, & obtuso detrahi ut sit summa vel differentia = 90 gradus, dicitur *complementum* anguli : quod verò addendum est angulo ut summa = 180 gradus, anguli vocatur *supplementum*.

THEOREMA II.

20. *Linea recta in rectam cadens angulos facit duobus rectis æquales, seu pro mensurâ semiperipheriam habentes.*

DEMONSTRATIO.

Sit linea CD (fig. 12.) quæ cadit in rectam AB : dico angulos DCA & DCB, quos facit linea illa, pro mensurâ habere semicircumferentiam : si enim à puncto C tanquam centro, describatur circumferentia, linea AB, quæ centrum continet, erit diameter, & proindè circumferentiam secabit in duas partes æquales ; igitur pars ADB erit semiperipheria : atqui arcus AD est mensura anguli DCA (18), arcus verò DB, qui est residuum semiperipheriæ, est mensura anguli DCB : ergò duo illi anguli simul sumpti semiperipheriam pro mensurâ habent : ergò duobus rectis æquivalent. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

21. Hinc 1° si plures lineæ in idem punctum alterius lineæ & ex eâdem parte cadant, omnes anguli simul sumpti æquales sunt duobus rectis : v. g. anguli ACD, DCE, ECF & FCB facti à tribus lineis DC, EC & FC, (fig. 13.) quæ incidunt in punctum C lineæ AB, pro mensurâ habent semiperipheriam, quæ à puncto C tamquam centro descripta fuit. Consequenter &c.

2°, Summa angulorum omnium, qui circà punctum aliquod formantur, æquivalet quatuor angulis rectis : v. g. summa angulorum circà punctum C, (fig. 14.) æquivalet quatuor rectis. Id evidens est, cùm anguli illi pro mensurâ peripheriam integram habeant, cujus centrum est C.

DEFINITIO X.

22. Anguli *in vertice oppositi*, sunt illi qui formantur per duas lineas sese intersecantes, ità ut angulorum illorum alter sit ex unâ parte puncti intersectionis, alter verò ex parte oppositâ : tales sunt anguli BCE & ACD, vel ACE & BCD. (fig. 15.).

THEOREMA III.

23. *Anguli in vertice oppositi sunt æquales* : BCE *v. g.* = ACD. (fig. 15.)

DEMONSTRATIO.

E puncto intersectionis duarum linearum, quæ hos angulos efficiunt, describatur peripheria ; secabitur ipsa in duas partes æquales per lineas

AB & DE, quæ ſunt diametri; ergò arcus AEB & arcus DAE ſeorſim conſtituent ſemiperipheriam, & conſequenter æquales erunt: ſi ergò detrahatur pars communis AE, reſidua adhuc erunt æqualia: Atqui reſiduum primæ ſemiperipheriæ eſt EB, & reſiduum ſecundæ eſt DA: ergò duo illi arcus EB & DA ſunt æquales: ſed illi arcus ſunt menſuræ angulorum BCE & ACD (6); ergò anguli illi ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA IV.

25. *Super lineam datam* AB *angulum facere æqualem dato* GEF. (fig. 16.).

RESOLUTIO.

È vertice anguli dati GEF, arcum deſcribe inter ambo ipſius latera; tum ab extremitate A lineæ datæ AB, & ex eâdem circini aperturâ, arcum deſcribe indefinitum BC æqualem arcui FG: quo peracto lineam duces à puncto A ad punctum C; efficiet ipſa angulum CAB æqualem angulo dato. Quod evidens eſt, cùm anguli illi pro menſurâ arcus habeant æquales.

PROBLEMA V.

26. *Angulum in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

Ex puncto A, tamquam centro (fig. 17.) deſcribe arcum BC: deindè ex punctis B & C tanquam centris, cum eâdem circini aperturâ, deſcribe arcus duos ſeſe in uno puncto, D, v. g. interſecantes: demùm ex puncto A, ad punctum D, duc rectam AD, ſecabit hæc angulum datum in duas partes æquales. Quoniam enim rectæ AD puncta quælibet, ſeorſim ſumpta, æqualiter diſtant à punctis B & C; punctum N, arcum ſecans, æqualiter etiam à prædictis punctis diſtat; igitur arcus BC, proindè & angulus cujus eſt menſura, in duas partes æquales dividitur.

PROBLEMA VI.

27. *Ex dato puncto* C (fig. 18 & 19.) *lineam ducere alteri perpendicularem.*

RESOLUTIO.

Punctum C vel extrà lineam, vel in lineâ eſſe poteſt: duos itaque problema iſtud complectitur caſus.

1°. Si punctum C extrà lineam fuerit, (fig. 18.) ex hoc puncto C tanquàm centro arcum deſcribe, qui lineam in duobus punctis E & F ſecet; tum à puncto E & puncto F, ex eâdem circini aperturâ, duos arcus deſcribe in eodem puncto D ſeſe interſecantes: denique rectam duc, quæ per punctum datum C, & punctum interſectionis amborum arcuum tranſeat, erit ipſa lineæ AB perpendicularis.

2°. Si punctum C in ipſâ lineâ fuerit (fig. 19.), ex hoc puncto tanquàm centro ſemiperipheriam deſcribe, quæ lineam AB ſecet in duobus punctis E & F, è quibus tanquàm centris deſcribendi ſunt arcus ex eâdem circini aperturâ, atque reliqua ut in primo caſu peragenda.

AXIOMA.

28. *Ubi duæ lineæ ſunt parallelæ, ut* AB & CD (fig. 6.) *ſi tertia, ut* XY, *fuerit uni parallela, alteri quoquè parallela futura eſt; hæc enim non poteſt ubique æqualiter diſtare à parallelarum alterutrâ, quin etiam ab aliâ ubique æqualiter diſtet.*

OBSERVATIO I.

29. Linea *ſecans* parallelas ut EF (fig. 20.) plures cum iis angulos efficit; alii autem ſunt inter parallelas, dicunturquè *interni*, hujuſmodi ſunt anguli A, B, C, D: alii ſunt extrà parallelas, vocanturque *externi*, tales ſunt anguli G & H in parte ſuperiori, atque O & P in inferiori: comparando angulos ſeu internos, ſeu externos, alterum cum altero, quidam dicuntur *alterni*, atque illi ſunt, quorum alter eſt in parte ſuperiori, alter verò in parte inferiori, alter ad dextram, alter ad ſiniſtram ſecantis: v. g. anguli A & D ſunt *alterni interni*, prout & duo alii B & C: pariter anguli H & O, ſunt *alterni externi*, ut & duo alii G & P.

OBSERVATO II.

30. Duo anguli per parallelas facti, ut H & D, quorum alter eſt externus, alter verò internus ex eâdem parte ſecantis, ſunt æquales; quantitas enim angulorum ex inclinatione pendet linearum; atqui ambæ parallelæ æqualiter inclinantur in ſecantem EF; ſi enim illarum una magis versùs punctum E inclinaretur quàm altera, jam illæ lineæ ad ſe accederent, & conſequenter deſinerent eſſe parallelæ: ergò anguli H &

D, quos efficiunt parallelæ ſuper EF, æquales ſunt. Propter eandem rationem angulus exterior P & angulus interior B, qui ſunt ſub parallelis ex eâdem ſecantis parte, ſunt etiam æquales. Pariter oſtendi poteſt angulos G & C ex alterâ ſecantis parte eſſe inter ſe æquales, ſicut & angulos O & A : angulos illos, quorum unus eſt externus, alter internus ex eâdem ſecantis parte, *correſpondentes* vocabimus. His obſervatis.

THEOREMA IV.

31. *Si duæ lineæ ſint parallelæ*, 1°. *anguli alterni interni ſunt æquales* : 2°. *anguli alterni externi ſunt æquales* : 3°. *duo anguli interni ex eâdem ſecantis parte, ſimul ſumpti, duobus rectis æquivalent*: 4°. *duo anguli externi ex eâdem partem ſecantis, ſimul ſumpti, duobus quoque angulis rectis æquivalent.*

DEMONSTRATIO.

1°. Sint duæ parallelæ IL & MN, (fig. 20.) probandum eſt angulos alternos internos A&D æquales eſſe. Itaque A = H, quia opponuntur in vertice: D quoque = H, prout modo oſtenſum eſt; conſequenter anguli A & D ſunt æquales. Pariter oſtenderetur duos alios angulos alternos internos B & C æquales eſſe, quia uterque = G.

2°. Anguli alterni externi G & P ſunt æquales: etenim G = B, quia opponuntur in vertice; aliundè P = B, quia ſunt correſpondentes : ergò duo anguli G & P ſunt æquales. Pari ratione probaretur angulos alternos externos H & O æquales eſſe, quia uterque = A.

3°. Duo anguli interni B & D ex eâdem parte ſecantis, ſumpti ſimul, duobus angulis rectis æquivalent. Duo enim anguli collaterales H & B ſimul ſumpti = 180° (8); ſi igitur, loco anguli H, aſſumatur angulus D ipſi æqualis, ſumma angulorum B & D æquivalebit quoque duobus rectis, ſeu 180 gradibus.

4°. Duo anguli externi H & P ex eâdem parte ſecantis, ſimul ſumpti, æquivalent duobus rectis : duo enim anguli collaterales D & P ſimul ſumpti = 180° (8); ergò ſi, pro angulo interno D, aſſumatur angulus externus H ipſi æqualis, ſumma angulorum H & P duobus quoque rectis æquivalebit.

PROBLEMA VII.

32. *Per datum punctum* C (fig. 21.) *lineam ducere alteri datæ* AB *parallelam.*

RESOLUTIO.

A puncto C, & intervallo pro libitu aſſumpto, duc arcum indefinitum BD : tum à puncto B & ex eâdem circini aperturâ, deſcribe alterum arcum AC, atque ope circini, ſuper primo arcu indefinito aſſume partem BD = AC; duc demùm rectam per duo puncta C & D tranſeuntem ; erit parallela lineæ AB. Quod evidens eſt; ductâ enim lineâ CB, anguli alterni ABC & BCD æquales ſunt, cùm habeant pro menſurâ arcus æquales AC & BD, & proindè lineæ AB & CD ſunt parallelæ.

DEFINITIO XI.

33. Anguli qui verticem in peripheriâ habent, quique per chordas formantur, dicuntur *inſcripti*, talis eſt angulus BAD (fig. 23.). Qui verticem quoque in peripheriâ habent, ſed per chordam & tangentem formantur, ut BAD, GAD (fig. 28) dicuntur *anguli ſegmenti*. Porrò *ſegmenti* nomine intelligitur circuli pars per chordam & arcum chordâ hâc ſubtenſum terminata ; tale eſt ſpatium ADF inter chordam AD & arcum AFD contentum.

THEOREMA V

ET FUNDAMENTALE.

34. *Angulus inſcriptus, ſeu, qui verticem in peripheriâ habet, quique per duas chordas formatur, pro menſurâ habet dimidium arcûs inter crura comprehenſi.*

Triplex contingere poteſt caſus : fieri enim poteſt ut laterum unum tranſeat per centrum, talis eſt angulus BAD (fig. 22.) : vel ut centrum occurrat inter ambo latera, ut in fig. 23 : vel demùm ut centrum ſit extrà angulum & ambo ipſius látera, ut in fig. 24. Probandum eſt, in triplici hoc caſu, angulum habere pro menſurâ mediam partem arcûs BD, cui innititur.

DEMONSTRATIO.

Primus caſus. Si latus AB anguli BAD per centrum C tranſeat, (fig. 22.) ducatur per hoc centrum linea EF alteri lateri AD parallela, aderunt duo anguli BCF & BAD æquales, (30) quia lineæ EF & AD ſunt parallelæ, & ambo illi anguli ſunt ex eâdem parte ſecantis AB, primus externus, ſecundus internus : atqui angulus BCF, utpotè verticem in centro habens, arcum BF inter ſua latera comprehenſum pro menſurâ

habet (18); ergò angulus BAD ipsi æqualis eundem quoque arcum BF pro mensurâ habet; probandum superest arcum hunc BF esse dimidium BFD : sic autem demonstratur : arcus BF æqualis est arcui AE, quia duo illi arcus sunt mensuræ angulorum æqualium, (23) scilicet angulorum BCF & ACE in vertice oppositorum. Pariter arcus DF æqualis est eidem arcui AE, utpotè qui inter parallelas comprehenduntur : ergò arcus ambo BF & DF sunt æquales; ergò sunt uterque media pars arcûs integri BFD. Porrò jam demonstratum est arcum BF esse mensuram anguli BAD; igitur hic angulus pro mensurâ habet mediam partem arcûs, cui innititur.

Secundus casus. Si centrum sit inter ambo latera anguli BAD, (fig. 23.) ex vertice A ducenda est linea, quæ per centrum transeat; dividet ipsa angulum BAD in duos alios, scilicet BAF & FAD : Atqui angulorum illorum primus pro mensurâ habet dimidium arcûs BF, quia latus AF per centrum transit : ob eandem rationem, angulus FAD pro mensurâ habet dimidium arcûs FD; ergò angulus totalis BAD pro mensurâ habet dimidium BF & dimidium FD, id est, dimidium arcûs BD inter sua latera comprehensi.

Tertius casus. Si centrum fuerit extrà angulum & ambo latera (fig. 24.) è vertice ducenda linea ut AF quæ per centrum transeat : linea illa faciet angulum DAF, qui pro mensurâ habet dimidium arcûs FD, seu, quod idem est, dimidium arcûs FB + dimidium arcûs BD : atqui angulus FAB, qui est pars anguli totalis DAB, pro mensurâ habet dimidium arcûs FB, quia latus AF per centrum transit; ergo angulus BAD, qui est altera pars anguli totalis, pro mensurâ habet dimidium BD : aliàs angulus totalis DAF dimidium FB + dimidium BD pro mensurâ non haberet.

COROLLARIUM I.

35. Omnes anguli inscripti, ut BAD, BED, BFD, eidem arcui BD innixi, (fig. 25.) sunt æquales; ratio est, quia singuli pro mensurâ habent dimidium hujus arcûs, cui innituntur.

COROLLARIUM II.

36. Angulus, ut BCD (fig. 26.) verticem in centro habens, atque eidem arcui innixus, ac angulus inscriptus BAD, est duplus anguli hujus inscripti : id evidens est, quia angulus verticem in centro habens pro mensurâ habet arcum integrum BD, cui innititur; dum interim angulus inscriptus nonnisi dimidium arcûs ejusdem pro mensurâ habet.

COROLLARIUM III.

37. Angulus inscriptus, ut BAD, (fig. 27.) diametro BD innixus est rectus : angulus enim diametro BD inniti nequit, quin etiam semiperipheriæ innitatur. Atqui angulus omnis inscriptus semiperipheriæ innixus est rectus, quia pro mensurâ habet dimidium semiperipheriæ, seu peripheriæ quadrantem : ergò.

COROLLARIUM IV.

38. Angulus inscriptus BAE, (fig. 27.) innixus arcui semiperipheriâ majori, est obtusus; è contrà angulus BAF, innixus arcui semiperipheriâ minori, est acutus : quod ex dictis evidens est.

THEOREMA VI.

39. *Angulus segmenti ut* BAD (fig. 28.) *mensuratur per dimidium arcûs quem subtendit chorda* AD.

DEMONSTRATIO.

Si ducatur linea ED tangenti AB parallela, anguli alterni interni BAD & ADE erunt æquales (31) : atqui angulus ADE mensuratur per dimidium arcum AE (34); ergo angulus BAD ipsi æqualis eandem habet mensuram : sed arcus AD = AE, cum hi arcus contineantur inter parallelas; ergò angulus BAD mensuratur per dimidium arcûs AD. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VII.

40. *Angulus* BAD (fig. 29.) *per tangentes efformatus & verticem habens extra circumferentiam, mensuratur per dimidium excessûs arcûs concavi* BD *suprà convexum* EF *intrà latera interceptum.*

DEMONSTRATIO.

Si è puncto contactûs F ducatur linea FG lateri AB parallela erit angulus GFD = BAD (31) : sed dimidius arcus FG est mensura anguli GFD; ergò & anguli BAD; atqui arcus FG est excessûs arcûs concavi GF suprà convexum BF; siquidem, ob parallelas AB & FG, arcus

BF = BG ; ergò angulus BAD mensuratur per dimidium excessûs arcûs concavi suprà convexum. Quod erat demonstrandum.

Levi attentione datâ, palam fiet eandem valere demonstrationem sive angulus BAD efformetur per tangentem & secantem ; sive per duas secantes.

DEFINITIO XII.

41. Ubi magnitudines plures, ut A, B, C, D ; totidem aliis *a*, *b*, *c*, *d*, proportionales dicuntur, designat expressio hæc priores esse antecedentes, cæteras verò consequentes rationum æqualium, ità ut A. a : : B. b : : C. c : : D. d. Si duæ dumtaxat utrimque fuerint magnitudines, ut A & B ex unâ parte, *a* & *b* ex aliâ, & duæ priores duabus aliis proportionales dicantur, intelligitur duarum priorum rationem duarum aliarum rationi æqualem esse, id est, A. B : : a. b : vel duas priores magnitudines esse antecedentes ; ità ut A. a : : B. b. Dum autem duæ magnitudines dicuntur duabus aliis reciprocæ, sensus est priores esse extrema proportionis, cujus posteriores sunt media, vel è contrà. Linea aliqua in mediam & extremam rationem dividitur, ubi in duas partes inæquales secatur, quarum major inter lineam integram & partem minorem est media proportionalis. Linea aliqua per aliam multiplicatur, ubi prima toties assumitur, quot in aliâ occurrunt puncta.

SCHOLION.

42. *Circà theorema sequens observandum quòd si duæ lineæ, ut* EF *&* GH, *intrà spatium parallelum comprehensæ*, (fig. 30.) *per parallelas secentur, evidens fit linearum illarum alteram in totidem partes divisum iri ac alteram & si illarum una in partes inter se invicem æquales dividatur, alia quoque in partes totidem sibi mutuò æquales dividetur* : v. g. *si* EF *in quatuor partes æquales dividatur, quæ per* P *designari possunt, altera scilicet* GH *in quatuor pariter partes sibi mutuò æquales secabitur, quæ per* S *indicari possunt, igitur in hâc hypothesi* EF = 4 P *&* GH = 4 S. *Similiter si duæ lineæ* AB *&* CD *intrà spatium parallelum concludantur, ex hypothesi quòd* AB *per parallelas in tres partes æquales secetur, altera linea* CD *in tres quoque partes æquales secabitur.*

THEOREMA VIII ET FUNDAMENTALE.

43. *Ubi lineæ duæ intrà spatium parallelum comprehensæ tantum inclinantur, ac duæ aliæ lineæ intra aliud spatium parallelum comprehensæ, duæ priores aliis duabus sunt proportionales.*

Sint duæ lineæ AB & CD intra spatium suum parallelum tantùm inclinatæ quantùm duæ aliæ lineæ EF & GH intrà spatium suum, ita ut AB & EF æqualiter inclinentur, & æqualiter etiam CD & GH inclinentur, probandum est AB. EF : : CD. GH ; *alternando*, AB. CD : : EF. GH.

DEMONSTRATIO.

Si assumatur super EF pars EI = AB, ducaturque parallela IL, spatium parallelum inter EG & IL comprehensum (fig. 30.) æquale erit spatio inter AC & BD comprehenso : consequenter aderit pars GL = CD, siquidem duæ illæ lineæ in his spatiis æqualiter inclinentur. Porrò evidens est EI & GL partes esse similes linearum EF & GH ; id est, si EI, v. g. sit media pars lineæ EF, erit quoque GL dimidia pars lineæ GH : cùm enim linea IL, aliis EG & FH sit parallela, necesse est ut æqualiter dividat EF & GH (42) : Sed aliundè partes similes magnitudinibus integris sunt proportionales : (Alg. 57) igitur EI. GL : : EF. GH, consequenter si loco partium EI & GL assumantur lineæ AB & CD ipsis æquales, aderit AB. CD : : EF. GH, vel *alternando*, AB. EF : : CD. GH. Quod E. D.

COROLLARIUM I.

44. Ex dictis sequitur duas lineas obliquas, in eodem spatio parallelo æqualiter inclinatas, esse æquales.

COROLLARIUM II.

45. Ex præcedenti theoremate sequitur productum linearum AB & GH æquale esse producto duarum aliarum EF & CD, quia duæ primæ sunt extrema, aliæ verò media proportionis unius.

COROLLARIUM III.

46. Si duæ lineæ, ut AB & CD (fig. 31) inter duas parallelas comprehensæ per tertiam parallelam EF secentur, in partes dividentur proportionales, id est, AE. EB : : CF. FD : spatium enim parallelum totale in duo alia dividitur per lineam EF. Atqui linea AE tantùm in spatio superiori inclinatur, quantum linea EB in inferiori, quia eadem est linea prolongata. Ob eandem rationem duæ partes CF & FD æqualiter quoque in spatio suo inclinantur ; con-

quenter juxtà Theorema præcedens AE. EB : : CF. FD, vel *alternando*, AE. CF : : EB. FD.

COROLLARIUM IV.

47. Si duæ lineæ, ut FD & EB, (fig. 32.) intrà ſpatium parallelum comprehenſæ, ſeſe ſecuerint, partes unius partibus alterius erunt proportionales, ità ut AF. AD : : AE. AB : ductâ enim lineâ A duabus aliis FE & BD parallelâ, duo aderunt ſpatia parallela, alterum ſuperius, alterum inferius : porrò linea AF tantùm in ſuo ſpatio inclinatur, quantùm AD in ſuo, ſiquidem ſint duæ partes ejuſdem lineæ. Ob eandem rationem duæ lineæ AE & AB æqualiter quoque in iiſdem ſpatiis inclinantur. Conſequenter duæ primæ lineæ AF & AD duabus aliis AE & AB proportionales ſunt.

COROLLARIUM V.

48. Si duo latera anguli, ut BAD (fig. 33.) ſecentur per lineam EF baſi parallelam, duæ partes lateris unius partibus alterius ſunt proportionales, ità ut AE. EB : : AF. FD. ductâ enim per punctum A lineâ baſi BD parallelâ, duæ lineæ AE & AF tantùm in ſuo ſpatio inclinabuntur, quantùm EB & FD in ſuo : undè exurgit proportio AE. EB : : AF. FD. vel *alternando* AE. AF : : EB. FD.

CAPUT II.

DE SUPERFICIEBUS ET FIGURIS PLANIS.

DEFINITIO I.

49. Figura eſt ſpatium undique concluſum : undè angulus non eſt figura, quia circumquaque non clauditur. Ex figuris aliæ *planæ*, aliæ *curvæ*, *mixtæ* aliæ. Planæ ſunt illæ, quarum ſuperficies ità unita eſt ut neque elevetur, neque deprimatur in quâcumque ſui parte, talis eſt ſpeculorum ſuperficies. Curvæ illæ ſunt quarum partes inæqualiter elevantur aut deprimuntur, talis eſt globi ſuperficies. Mixtæ tandem dicuntur, quæ partim planæ, partim curvæ ſunt. Figura vel *regularis* eſt vel *irregularis* : regularis eſt illa cujus anguli omnes, omniaque latera æqualia ſunt : ſi verò æqualia non fuerint omnia latera, omneſque anguli, figura erit irregularis. Si omnia alicujus figuræ latera æqualia ſint, dicitur *æquilatera* ; ſi omnes anguli æquales, *æquiangula*.

DEFINITIO II.

50. Triangulum eſt figura, quæ tribus ſolùm lineis totidem angulos efficientibus conſtat. In triangulo pro baſi ordinariè aſſumitur latus inferius, verùm indiſcriminatim aliud quodcumque aſſumi poteſt. Linea perpendicularis ab anguli alicujus apice in baſim ducta, dicitur *altitudo trianguli*; (fig. 35.) poteſt autem contingere ut linea illa extrà triangulum cadat ; tumque ut habeatur altitudo, prolonganda eſt baſis ex eâ parte quâ cadit perpendicularis : v. g. ſi è puncto E trianguli DEF (fig. 34.) ducatur perpendicularis EH in baſim DF, cadet ipſa extrà triangulum, eritque baſis illa prolonganda ultrà punctum D, ut ipſi occurrat perpendicularis.

DEFINITIO III.

51. Triangulum vel ſecundùm latera, vel ſecundùm angulos ſpectari poteſt : ſi ſecundùm latera, triplicis eſt generis : vel enim tria ipſius latera æqualia ſunt diciturque *æquilaterum* : tale eſt triangulum ABC, (fig. 35.) vel duo ſolùm latera æqualia habet, (ut in fig. 36.) & vocatur *iſoſceles* : vel inæqualia ſunt tria ipſius latera, & *ſcalenum* appellatur. Si triangulum penès angulos ſpectetur, vel unum ex illis rectum habet, & dicitur *rectangulum*; tale & triangulum MNO; (fig. 37) vel unum habet obtuſum, & vocatur *amblygonium* ſeu *obtuſangulum* : tale eſt triangulum EDF : (fig. 34.) vel denique tres ſuos angulos habet acutos, (fig. 35.) & *oxigonum* ſeu *acutangulum* nuncupatur. Triangulum amblygonium & oxigonum dicuntur quoque *obliquangula*.

THEOREMA PRIMUM ET FUNDAMENTALE.

52. *Anguli omnes trianguli cujuſcumque, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis*, ſeu, *pro menſurâ ſemiperipheriam habent*.

DEMONSTRATIO.

Omne triangulum, ut ABC (fig. 38.) concipi poteſt circulo inſcriptum : tunc angulus A pro menſurâ

mensurâ habebit dimidium arcûs BC, angulus B dimidium arcûs CA, & angulus C, dimidium arcûs AB (34): Atqui tres illi arcus integram constituunt peripheriam; ergò tres mediæ trium illorum arcuum partes semiperipheriam constituunt: consequenter in triangulo anguli omnes simul sumpti pro mensurâ semiperipheriam habent: sunt æquales igitur duobus rectis. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

53. Si prolongetur trianguli latus unum, ut AB, (fig. 39) angulus exterior CBD vel *g*, æqualis erit duobus internis oppositis *m* & *o* simul sumptis; angulus enim exterior *g* angulo *n* junctus, æquivalet duobus rectis: (20.) pariter anguli *m* & *o* eidem angulo *n* juncti, æquivalent quoque duobus rectis: (16.) consequenter angulus exterior *g* æqualis est angulis internis oppositis *m* & *o* simul sumptis. Eodem modo probari potest quòd prolongato latere AC angulus exterior BAF vel *k* duobus internis *o* & *n* æqualis sit.

COROLLARIUM II.

54. In quolibet triangulo, cognitis duobus angulis, facilè cognoscitur tertius: nam tertius est semper supplementum ad 180 gradus: v. g. Si cognoscantur duo anguli, quorum unus sit 40 graduum, alter verò 80, erit tertius = 60 gradus; quia duo primi simul sumpti = 120 gradus: porrò supplementum 120 graduum ad 180, est 60.

COROLLARIUM III.

55. Ubi duo anguli alicujus trianguli duobus alterius æquales sunt, alter alteri; aut summa duorum, in primo, summæ duorum, in secundo, æqualis est, tunc tertius angulus primi trianguli æqualis est tertio angulo secundi: & si angulus unus primi trianguli æqualis sit uni angulo secundi, summa duorum aliorum, in primo, summæ duorum aliorum, in secundo, æqualis est. Hæc evidenter patent ex dictis. Evidens quoque est quòd in triangulo quolibet angulus rectus, aut obtusus nonnisi unicus esse possit; aliàs tres anguli simul sumpti duobus rectis majores essent.

THEOREMA II.

56 *Ubi in triangulo sunt latera æqualia, anguli lateribus his oppositi sunt etiam æquales; & reciprocè si occurrant anguli æquales, latera iis opposita sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Sit triangulum ACB, (fig. 38.) cujus latus AC lateri BC æquale supponatur; dico 1° angulum B lateri AC oppositum æqualem esse angulo A opposito lateri BC: cùm enim latera AC & BC sint æqualia, arcus AC & BC, qui ab his sustinentur lateribus, æquales erunt, quia chordæ æquales sustinent arcus æquales; ergò dimidium arcûs AC dimidio arcûs BC æquale est; atqui dimidia hæc angulorum B & A mensuræ sunt (34.); ergò anguli illi æquales sunt. Quod erat primum.

2°. Si angulus B æqualis sit angulo A, latera opposita AC & BC æqualia sunt: si enim duo anguli A & B æquales sint, eorum mensuræ, id est, dimidium arcûs AC & dimidium arcûs BC, æquales sunt; ergò arcus integri AC & BC sunt etiam æquales: atqui arcus æquales chordis æqualibus sustinentur; ergò chordæ, seu latera AC & BC æqualia sunt. Quod erat alterum. Ex hoc theoremate sequitur quòd si tria alicujus trianguli latera essent æqualia, tres quoque anguli æquales futuri essent, & vice versâ.

THEOREMA III.

57. *Ubi in triangulo inæqualia sunt omnia latera, angulus maximus maximo opponitur lateri, minimus minimo, & angulus medius lateri medio.*

DEMONSTRATIO.

Si in triangulo ACB (fig. 40.) angulus A aliis duobus major sit, latus BC ipsi oppositum est omnium maximum: si enim angulus A sit major, necesse est ut arcus BC, cujus dimidium pro mensurâ habet, sit quoque major arcu AB & AC; & consequenter chorda aut latus BC aliis lateribus majus erit Q. E. D.

Eodem modo probabitur quod si angulus C sit minimus, latus oppositum AB sit etiam omnium minimum. Demùm si angulus B medium teneat locum inter angulum A & C, latus AC medium etiam locum tenebit inter latera BC & AB; siquidem arcus quem subtendit sit minor arcu BC & major arcu AB.

DEFINITIO IV.

58. Duo triangula *in omnibus æqualia*, seu simpliciter *æqualia* dicuntur, quoties omnia unius latera, omnesque anguli, correspondentibus alterius lateribus & angulis, seorsim sumptis, æquan-

tur. *Latera correspondentia* ea dicuntur, quæ æqualibus angulis opponuntur. *Anguli* autem *correspondentes* ii sunt qui relativè ad latera adjacentia situm eundem habent.

Ubi duo triangula in omnibus æqualia sunt, idest, tùm quoad angulos, tùm quoad latera, facilè intelligitur quod si unum sic alteri applicetur, ut latera correspondentia sibi invicem imponantur, tunc in omnibus sic congruere debeant, ut simul confundantur, unicumque, ut ita dicam, triangulum constituant.

DEFINITIO V.

59. Duo triangula *similia* dicuntur, quoties omnes unius anguli correspondentibus angulis alterius æquales sunt. In eo itaque differunt triangula præcisè *similia*, ab *æqualibus*; quod priora angulos correspondentes dumtaxat habeant æquales, latera autem inæqualia: posteriora vero non angulos tantum sed & latera correspondentia habeant æqualia.

COROLLARIUM I.

60. Hinc quia duo triangula æquiangula necessariò habent angulos correspondentes æquales (56), necessariò quoque similia sunt.

COROLLARIUM II.

61. Hinc duo triangula, quorum duo anguli correspondentes utrimque sunt æquales, similia etiam sunt; siquidem, in hypothesi tertius angulus necessariò sit utrimque æqualis (55).

COROLLARIUM III.

62. Si in triangulo quocumque ABD (fig. 33) ducatur linea EF basi parallela erit triangulum AEF simile triangulo ABD; siquidem anguli E & B, necnon F & D sint utrimque æquales (30) & insuper angulus A utrique triangulo communis.

THEOREMA IV.

63. *Si in duobus triangulis* bca *&* BCA (fig. 41) *latus unum* bc *&* BC *sit utrimque æquale & anguli correspondentes supra ipsum efformati utrimque pariter æquales sint, triangula in omnibus erunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Si supra latus BC mentaliter applicetur latus *bc*, ob eorum æqualitatem punctum *b* cadet in punctum B, & *c* in punctum C. Quoniam insuper anguli *b* & *c*, seorsim sumpti, angulis correspondentibus B & C æquales sunt, latus *ab* supra AB imponetur, & pariter latus *ac* supra AC; quare duo latera *ba* & *ca* in eodem puncto coadunabuntur, ac latera BA & CA; igitur prædicta triangula perfectè congruent & in omnibus erunt æqualia. Q. E. D.

THEOREMA V.

64. *Si trianguli cujuscumque* abc *latera duo*, ab *&* ac, *æqualia fuerint duobus alterius trianguli lateribus* AB *&* AC (fig. 41.); *si insuper angulus, inter prædicta latera interceptus, fuerit utrimque æqualis, triangula erunt in omnibus æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur latus *ab* lateri AB sic applicatum, ut punctum *a* puncto A & punctum *b* puncto B exactè respondeant; tunc, ob angulum *a* & A utrimque æqualem, latus *ac* lateri AC applicabitur, &, ob horumce laterum æqualitatem, punctum *c* in C cadet; igitur basis *bc* necessariò basi BC perfectè congruet, eruntque ambo triangula perfectè æqualia. Q. E. D.

THEOREMA VI.

65. *Quotiescumque duo triangula similia sunt, tunc quælibet unius latera correspondentibus alterius lateribus sunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo triangula similia *abc* & ABC (fig. 42); probandum latus *ca* esse ad latus CA, ut latus *ab* ad latus AB; ut latus *cb* ad latus CB.

1°. Si latera *ab* & AB tamquam bases habeantur, & ab utriusque trianguli vertice *c* & C ducantur lineæ *cm* & CM basibus parallelæ; tunc propter angulos *a* & *b* angulis correspondentibus A & B æquales, latera *ac* & *bc*, tam inclinabuntur intra parallelas, quàm latera AC & BC; adeòque (43) habebitur hæc proportio : *ac*. AC : : *bc*. BC.

2°. Si latera *bc* & BC spectentur tamquam bases, & è verticibus *a* & A ducantur lineæ *an* & AN basibus parallelæ; tunc latera *ab* & *ac* trianguli minoris tantumdem in spatio parallelo inclinabuntur, quantum trianguli majoris latera AC &

BC; ſiquidem, ex hypotheſi, anguli correſpondentes utrimque ſint æquales; quare (30) prodibit ſequens proportio, *ab*. AB : : *ac*. AC : ſed (ex parte 1ª) *bc*. BC : : *ac*. AC; adeòque *ab*. AB : : *bc*. BC (Alg. 52); igitur tria minoris trianguli latera, tribus majoris lateribus correſpondentibus proportionalia ſunt. Q. E. D.

THEOREMA VII.

66. *Si duo trianguli minoris latera* dc *&* ce *(fig. 43.) duobus trianguli majoris lateribus* AC *&* CB *proportionalia ſint, & inſuper angulus c &* C, *inter hæc latera interceptus, utrimque fuerit æqualis, ſimilia erunt triangula.*

DEMONSTRATIO.

Ut manifeſta fiat theorematis veritas ſufficit ut probetur angulos *d* & *e* trianguli minoris æquales eſſe angulis correſpondentibus A & B trianguli majoris (59), id autem ſic probatur : in majoris trianguli latere CA, ſumatur mentaliter, vel ope circini, pars CD æqualis lateri *cd* trianguli minoris : dein ex puncto D ducatur linea DE baſi AB parallela, aderit triangulum CDE, ſimile triangulo majori CAB (62); quare ſi triangulum *cde* probetur in omnibus æquale triangulo CDE, erit *cde* ſimile CAD (Alg. 52); hæc autem perfecta æqualitas ſic demonſtratur :

Quia triangulum CDE ſimile eſt triangulo CAB (62) habetur ſequens proportio : CD. CE : : CA. CB (65) : ſed, per hypoteſim, minoris trianguli *cde* latera *cd* & *ce* lateribus CA & CB etiam ſunt proportionalia; quare habetur, *cd*. *ce* : : CA. CB : cum autem, in utrâque hâc proportione, poſtrema ratio eadem ſit, rectè infertur, *cd*. *ce* : : CD. CE (Alg. 52) & *alternando*, *cd*. CD : : *ce*. CE : jam verò, per conſtructionem, *cd* = CD; quare *ce* = CE (Alg. 73); igitur cum triangulorum *cde* & CDE duo latera correſpondentia utrimque æqualia ſint, & angulus inter ea interceptus utrimque etiam æqualis, hæc triangula in omnibus æqualia ſunt (64) adeòque unum in locum alterius ſubſtitui poteſt : ſed CDE ſimile eſt CAB; ergo *cde* eſt quoque ſimile CAB. Quod E. D.

COROLLARIUM I.

67. Hinc ſi duæ chordæ CB & DA, (fig. 44) in circulo quolibet, ſeſe mutuò ſecent, erunt duo unius ſegmenta alterius ſegmentis reciprocè proportionalia, ita ut inſtitui poſſit hæc proportio, BE. DE : : EA. CE : nam ductis lineis CD & AB, duo triangula CDE & AEB ſimilia ſunt, ſiquidem 1° anguli in vertice oppoſiti æquales ſint (23); deindè æquales etiam ſunt anguli inſcripti correſpondentes C & A, utpote eidem arcui DB inſiſtentes; idem etiam dicendum de angulis B & D; quare unius trianguli latera correſpondentibus lateribus alterius ſunt proportionalia.

COROLLARIUM II.

68. Hinc ſi chorda DE (fig. 46) diametro CA fuerit perpendicularis, erit BA. BD : : BE. BC : ſed BE = BD (15); ergo BA. BD : : BD. BC. Quare B eſt media proportionalis inter diametri ſegmenta BA & BC. Hinc eruitur facilis methodus inveniendi mediam proportionalem inter duas lineas datas; nempè, lineis datis in unam diametrum adunatis, è puncto medio ducatur peripheria per diametri extrema; deindè è puncto unionis linearum datarum perpendiculariter erigatur chorda dimidia, hæc erit media proportionalis quæſita.

COROLLARIUM III.

69. Si duæ ſecantes circulo exteriores EB & EC, (fig. 47) ab eodem puncto prodeuntes, ad concavam uſque circuli circumferentiam protendantur; ſecantium partes circulo exteriores erunt ſecantibus integris reciprocæ, habebiturque, EB. EC : : ED. EA : ductis enim chordis BD & AC, erit triangulum EBD ſimile triangulo EAC, ob angulum communem E & angulos correſpondentes B & C eidem arcui innixos; quare latera correſpondentia erunt proportionalia, prodibitque mox allata proportio, EB. EC : : ED. EA.

COROLLARIUM IV.

70. Si in triangulo rectangulo ABC (fig. 45) ex anguli recti vertice B demittatur perpendicularis BD in baſim AC, erit 1° latus BC medium proportionale inter baſim integram AC, ſeu *hypotenuſam* (hoc nomine donatur latus angulo recto oppoſitum) & ſegmentum correſpondens DC : nam, in hypoteſi, triangula ABC & BDC ſunt ſimilia, ſiquidem ambo habeant unum angulum rectum, & inſuper angulus C utrique ſit communis, ac conſequenter *m* = *e*; quare latera correſpondentia proportionalia ſunt, habeturque, AC. BC : : BC. CD; ideſt hypotenuſa majoris trianguli eſt ad hypothenuſam minoris, ut latus BC trianguli

majoris est ad latus sibi correspondens DC in triangulo minori.

2°. Latus AB est pariter medium proportionale inter hypothenusam AC & segmentum correspondens AD : enim vero similia sunt triangula ABC & ABD, cum ambo habeant unum angulum rectum & insuper angulus A utrique sit communis, ac consequenter tertius angulus utrimque æqualis, seu $o = r$, quapropter latera correspondentia proportionalia sunt, obtinetque proportio sequens, AC. AB :: AB. AD.

THEOREMA VIII.

71. *In triangulis similibus, latera correspondentia altitudinibus sunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Si in triangulis similibus BAC & *bac* (fig. 48.) è verticibus A & *a* demittantur lineæ AD & *ad* basibus perpendiculares, quæ erunt prædictorum triangulorum altitudines (2), similia erunt triangula BAD & *bad*, nam anguli D & *d*, utpote recti, æquales sunt; aliundè $B = b$, per hypotesim, & consequenter $A = a$; igitur latera prioris trianguli correspondentibus lateribus posterioris sunt proportionalia; quare 1° habebitur, AB. *ab* : : AD. *ad*. Quoniam autem, per hypotesim, AC. *ac* : : AB. *ab*, erit etiam, AC. *ac* : : AD. *ad*. Demum quia BC. *bc* : : AB. *ab*, erit pariter BC. *bc* : : AD. *ad* (Alg. 52); igitur in triangulis similibus latera quælibet sunt altitudinibus proportionalia. Q. E. D.

SCHOLION.

72. *Ex Theorematibus hactenus propositis circa triangula æqualia & similia faciles eruuntur methodi ad mensurandas objectorum, sive ex una dumtaxat parte accessorum, sive etiam inaccessorum, distantias, latitudines altitudines &c: ast cum diserta harum methodorum expositio prolixiùs extenderet hujusce compendii limites, sufficiet has vivâ voce pandere. Præsertim cum in trigonometriâ expositurі simus viam certiorem ad horum problematum resolutionem.*

PROBLEMA I.

73. *Datis tribus lineis, quartam invenire cæteris proportionalem?*

Sint lineæ datæ A, B & C quæ cum quæsitâ x sequentem efforment proportionem, A. B. : : C. x.

RESOLUTIO.

È puncto E (fig. 49) duc duas lineas indeterminatas angulum efformantes : deindè in harum linearum alterutrâ sume partem $EF = A$; & in aliâ sume partem $EG = B$; post hàc duc rectam FG : tùm supra lineam primam sume iterùm partem $FH = C$; his factis, si duxeris lineam HK lineæ FG parallelam, erit GK quarta proportionalis quæsita, ut facilè probatur attentâ similitudine triangulorum EFG & EHK (62).

Quoniam autem, quemcumque locum in proportione teneat ignota, hæc quarto loco, sive *alternando*, sive *invertendo*, semper constitui potest; ideò mox tradita methodus inservire potest ad retegendam lineam ignotam tribus cognitis proportionalem, quisquis sit in proportione ignotæ locus.

Eâdem methodo inveniri potest linea tertia duabus datis proportionalis; cum enim, in hypotesi, datarum una gerat vices mediæ proportionalis, hæc linea bis supra anguli latera applicabitur adinstar duarum linearum diversarum.

PROBLEMA II.

74. *Lineam quamlibet datam* BC (fig. 50) *dividere in partes quæ proportionales sint partibus alterius lineæ datæ* bc?

RESOLUTIO.

Lineis datis in eodem plano parellelè constitutis, per earum extrema duc lineas AB & AC quæ coadunabuntur in quodam puncto A, v. g: tum ex puncto A, per puncta divisionis datæ 1, 2, 3, duc rectas A*m*, A*n* & A*r*, hæ lineam BC, in punctis *m*, *n*, *r*, divident in partes divisionibus lineæ *bc* proportionales; ita ut si *b*1 sit quinta pars lineæ *bc*, erit quoque B*m* pars quinta lineæ BC, & sic de cæteris : quoniam enim triangula A*b*1 & AB*m*, necnon A12 & A*mn* &c sunt similia (62) habetur A*b*. *b*1 : : AB. B*m*; deindè A1.12 : : A*m*. *mn* & sic de cæteris : sed in his proportionibus, primi consequentes sunt portiones lineæ *bc* cujus divisiones datæ sunt, secundi verò consequentes sunt lineæ dividendæ portiones; ergo posteriores sunt prioribus proportionales.

Si linea dividenda esset divisâ minor, tunc præcisè mutandus esset linearum locus.

COROLLARIUM.

75. Hinc quælibet linea data facillimè in plures partes æquales dividi potest. Nempè supra lineam

indeterminatam sumantur tot partes æquales quot habere debet linea dividenda, deindè hæ duæ lineæ in eodem plano parallelè collocentur, cæteraque absolvantur ut suprà; & prodibit divisio quæsita.

DEFINITIO VI.

76. *Quadrilaterum* est figura quatuor lineis terminata. Linea recta ab uno quadrilateri angulo ad oppositum ducta, dicitur *diagonalis*; talis est linea AD, (fig. 52.) si quadrilaterum nulla habeat latera parallela, aut si duo tantùm, vocatur *trapezium*, tale est quadrilaterum fig. 51ᵃ: verùm ubi quodlibet latus opposito est parallelum, quadrilaterum dicitur *parallelogrammum*, ut CABD (fig. 52). Si anguli parrallelogrammi sint recti, dicitur *rectangulum*, & si singula rectanguli latera sint æqualia, vocatur *quadratum*, ut ABCD (fig. 53.). Verùm ubi opposita tantùm latera æqualia sunt, *rectangulum oblongum* appellatur, ut in fig. 54. Si anguli parallelogrammi fuerint obliqui, dicitur *obliquangulum*, quod utique duplex est, *rhombus* & *rhomboïdes*: Rhombus est parallelogrammum obliquangulum, cujus æqualia sunt quatuor latera, ut ABCD (fig. 55): Rhomboïdes verò cujus opposita solùm latera æqualia sunt, ut in fig. 52ª.

SCHOLION I.

77. *Quadrilaterum designari potest quatuor litteris in vertice angulorum exaratis, vel duabus solùm in angulorum oppositorum vertice collocatis: ubi sermo fit de quadrato lineæ cujusdam, intelligitur quadratum, cujus latus quodlibet lineæ æquale est*: v. g. *quadratum lineæ* EF, (fig. 53. *est quadratum* ABCD, *cujus latus quodvis* =EF. *Ubi designandum est lineæ, ut* EF, *quadratum, scribitur* $\overline{EF}^2$ *vel præcisè* EF^2.

SCHOLION II.

78. *In omni quadrilatero, ut* ACDB, *(fig. 51.) summa quatuor angulorum quatuor rectis semper æqualis est: si enim ducatur diagonalis* AD, *quadrilaterum in duo triangula dividet; quorum anguli ex ipsis quadrilateri angulis formabuntur: porrò, ut jam demonstratum est, in triangulo tres anguli duobus rectis æquales sunt: ergò omnes anguli amborum triangulorum quatuor rectis æquivalent; proindèque omnes quadrilateri anguli simul sumpti quatuor rectis æquales sunt.*

SCHOLION.

79. *In omni parallelogrammo, ut* CABD (fig. 52.) *latera opposita* AB & CD, *vel* AC & BD *inter se æqualia sunt* (44). *Insuper duo anguli suprà latus idem, ut* A & B, *vel* A & C *simul sumpti duobus rectis æquivalent* (31). *Demùm anguli oppositi, ut* A & D, *vel* C & B *inter se æquales sunt; siquidem unusquisque eorum sit supplementum anguli interpositi.*

COROLLARIA.

80. Ex his sequitur, 1°, quòd si ducatur diagonalis, ut AC, in parallelogrammo, ipsum divisura sit in duas partes æquales, quæ erunt triangula ACD & DBA (fig. 52.); tria enim prioris latera, scilicet AC, CD & AD, tribus posterioris lateribus BD, AB & AD æqualia sunt. Sequitur 2°, quòd, in parallelogrammo quolibet, angulus, ut A, rectus esse nequeat, quin cæteri quoque tales sint, si enim angulus A (fig. 54.) rectus est, rectus quoque erit oppositus D; pariter rectus erit angulus B, quia duo anguli A & B duobus rectis æquivalent; igitur angulus C oppositus angulo B, erit quoque rectus.

DEFINITIO VII.

81. Si figura plures habeat quàm quatuor angulos & plura quàm quatuor latera, *polygonum* dicitur. Si quinque habeat latera, *pentagonum*, vocatur; si sex, *exagonum*; si septem, *eptagonum*, si octo, *octogonum*; si novem, *henneagonum*; si decem, *decagonum*; si undecim, *endecagonum*; si mille, *chiliogonum*; si decies millia, *myriogonum*. Polygoni autem ambitum, *perimetrum* dixêre Geometræ. Si omnes polygoni anguli, omniaque latera fuerint æqualia, polygonum dicitur *regulare*. Si secùs, *irregulare* nuncupatur.

THEOREMA IX.

82. *Omnes anguli cujuslibet polygoni æquales sunt bis totidem rectis, demptis quatuor, quot sunt in polygono latera.*

V. g. Si in polygono quinque sint latera, ut dignoscatur quot rectis æquivaleant anguli omnes hujus polygoni, duplicandum erit 5, quod dabit 10, è quo subtrahendum 4, aderitque residuum 6; in pentagono igitur anguli omnes simul sumpti sex angulis æquivalent.

DEMONSTRATIO.

E puncto A, vertice unius angulorum, (fig. 56) ducendæ sunt lineæ ad cæteros angulos, præter duos proximos, nimirùm D & E. Lineæ illæ totidem efficient triangula, demptis duobus, quot sunt in polygono latera, aut anguli; quo posito sic ratiocinor. Si totidem essent triangula, quot sunt in polygono latera, cùm anguli cujusvis trianguli duobus rectis æquivaleant, anguli triangulorum in polygono formatorum duobus rectis toties æquivalerent, quot sunt in polygono latera; id est, in polygono, anguli simul sumpti æquales forent bis totidem rectis, quot sunt latera; verùm non totidem adsunt triangula, quot latera; duo enim insuper ad id requirerentur: sed anguli duorum triangulorum quatuor rectis æquivalent: consequenter omnes anguli cujuslibet polygoni &c. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

83. Si ex unâ parte prolongetur quælibet ex lineis illis, quæ polygoni perimetrum constituunt, omnes anguli externi FAB, GBC, HCD, KDE LEA (fig. 57.) simul sumpti quatuor rectis æquivalebunt: quilibet enim angulus internus, ut EAB, & angulus externus FAB ejus supplementum, simul sumpti, duobus rectis æquivalent; (20) & proindè angulos tùm externos tùm internos conjunctim assumendo, toties duorum rectorum aderit valor, quot sunt anguli interni, aut latera in polygono, id est, anguli interni simul sumpti bis totidem rectis æquales sunt, quot sunt in polygono latera: atqui soli anguli interni bis totidem rectis, demptis quatuor, æquivalent, quot adsunt latera; ergò summa omnium externorum quatuor dumtaxat rectis æquivalet.

COROLLARIUM II.

84. Summa angulorum externorum polygoni unius, summæ angulorum externorum alterius æqualis est, sivè polygona eumdem habeant laterum numerum, sivè non: quod quidem ex Corollario præcedenti evidenter sequitur, cum utraque summa quatuor rectis æquivaleat.

DEFINITIO VIII.

85. *Polygonum inscriptum* illud est cujus angulus quilibet in circuli peripheriâ verticem habet. Igitur pentagonum ABC (fig. 58) inscribitur magno circulo, cujus radius est CA. *Polygonum circumscriptum* est cujus latera omnia sunt circuli tangentes; itaque pentagonum figuræ ejusdem circumscribitur exiguo circulo, cujus radius est CG. Ubi polygonum circulo inscribitur, circulus dicitur *circumscriptus*, ubi verò polygonum circumscribitur, circulus vocatur *inscriptus*. In polygono regulari duplex distinguitur radius, *obliquus* & *rectus*. Radius obliquus est linea ducta à centro polygoni ad unum figuræ angulum, talis est linea CA. (fig. 58) Radius rectus est linea à centro suprà latus unum perpendiculariter ducta, talis est linea CG. (fig. eâdem.) Radius ille aliter dicitur *apothema*.

THEOREMA X.

86. *Si in polygono regulari à vertice duorum angulorum vicinorum ducantur lineæ, quæ angulorum illorum quemlibet in duas partes æquales dividant, lineæ illæ, à vertice angulorum ad punctum occursûs sumptæ sunt æquales; omnesque aliæ lineæ ab hoc puncto ad cæteros polygoni angulos ductæ, prioribus quoque æquales sunt.*

Sit pentagonum regulare ABCDE (fig. 59) si ab angulis duobus vicinis A & B ducantur lineæ AF & BF, quæ angulos A & B dividant in partes æquales, quæque sibi in puncto F occurrant, dico lineas AF & BF æquales esse, cæterasque lineas à puncto F ad cæteros figuræ angulos ductas his quoque duabus æquales esse.

DEMONSTRATIO.

Prima pars. Angulus totalis in A angulo totali in B æqualis est, siquidem regularis supponitur figura: ergò angulus h, qui est dimidium primi, æqualis est angulo i, qui est dimidium secundi; ergò in triangulo AFB duo latera FA & FB æqualia sunt. (56.)

Secunda pars. Linea FC lineæ FB æqualis est. Ut id demonstretur, dumtaxat probandum incumbit triangulum BFC primo triangulo AFB in omnibus æquale esse; ex quo concludetur ipsum isoscele esse non secùs ac primum illud triangulum. Latera BA & BF primi trianguli lateribus BC & BF secundi æqualia sunt: aliundè ex hypothesi angulus i, inter duo latera primi trianguli comprehensus, angulo k, inter duo latera secundi comprehenso, æqualis est; ergò ambo triangula in omnibus æqualia sunt, proindèque latus FC lateri FB æquale est (64). Q. E. D.

COROLLARIUM I.

87. Punctum F (fig. 59.) dicitur centrum, & lineæ ab hoc puncto ad polygoni angulorum apices ductæ sunt radii obliqui, qui sunt omnes inter se æquales, ut modò demonstratum est; pariter radii recti, ut FG, sunt quoque inter se æquales; cùm enim triangula in omnibus æqualia sint, eorum altitudines, quæ sunt radii recti, sunt etiam æquales (71).

COROLLARIUM II.

88. Polygono regulari dato semper circumscribi potest circulus, cum enim centrum polygoni ab angulo quolibet æqualiter distet, si ab hoc centro, intervallo radii obliqui, ut CA, describatur peripheria, (fig. 58.) transibit ipsa per singulos angulorum apices; proindè polygono circumscribetur circulus.

COROLLARIUM III.

89. Polygono regulari dato semper inscribi potest circulus: cùm enim omnes radii recti æquales sint, à polygoni centro & radii recti, ut CG, intervallo circumferentia describatur, (fig. 58.) omnia tanget polygoni latera, nec ultrà pertransibit; consequenter inscribetur circulus.

SCHOLION.

90. *Si duo polygona regularia eidem circulo aut duobus circulis æqualibus inscribantur, perimeter polygoni plura latera habentis major est perimetro polygoni pauciorum laterum*: v. g. *Perimeter pentagoni perimetro quadrati major est; cùm enim circuli peripheria perimetro polygoni cujuscumque circulo inscripti major sit, quò plùs polygoni inscripti perimeter ad circuli peripheriam accedit, eò est major. Porrò pentagoni perimeter magis ad peripheriam accedit, quàm perimeter quadrati; cùm pentagoni latera sint chordæ minores quàm quadrati latera; ergò pentagoni perimeter quadrati perimetro major est.*

91. *È contrà inter polygona regularia eidem circulo aut circulis æqualibus circumscripta, illud minorem habet perimetrum, quod plura habet latera; circuli namque peripheria polygoni cujuscumque circumscripti perimetro minor est, consequenter quò polygoni circumscripti perimeter magis ad peripheriam accedit, eò minor esse debet: Porrò ad peripheriam eò magis accedit perimeter, quò polygonum plura habet latera; cùm enim latera illa sint totidem tangentes, eò minùs recedunt, quò minora sunt; ergò quò plura latera habet polygonum circumscriptum, eò minor est ipsius perimeter.*

92. *Exindè sequitur quòd si polygonum regulare, seu inscriptum, seu circumscriptum infinita haberet latera, ejus perimeter ad peripheriam infinitè accederet atque cum eâ confunderetur: posset igitur pro peripheriâ ipsâ assumi ideòque spectari potest circulus ut polygonum regulare infinitorum laterum.*

DEFINITIO IX.

93. Duæ figuræ sunt *similes*, dùm quilibet angulus unius cuilibet angulo alterius æqualis est in eodem ordine, & primæ latera correspondentibus secundæ lateribus proportionalia sunt: latera hæc correspondentia, ut *ab* & AB, *bc* & BC, *cd* & CD, *de* & DE, *ef* & EF &c. (fig. 60.) dicuntur *homologa*. Porrò latera duo sunt homologa, ubi in ambabus figuris eodem modo sita sunt respectivè ad angulos & ad alia latera: igitur ut duo latera sint homologa, necesse est ut anguli, inter quos situm est primum, respectivè æquales sint angulis, inter quos occurit secundum: ut v. g. *ab* & AB sint homologa, necesse est ut angulis *a* & *b* anguli A & B æquales sint.

THEOREMA XI.

94. *In polygonis regularibus & similibus latera homologa proportionalia sunt radiis, tum obliquis, tum rectis.*

DEMONSTRATIO.

1°. Triangula ABC & *abc* (fig. 61.) sunt similia (86 & 61.); igitur latera correspondentia sunt proportionalia; adeoque AB. AC :: *ab*. *ac*; sed AB & *ab* sunt latera homologa, AC verò & *ac* radii obliqui; ergo &c. Quod E. 1um.

2°. Triangula FCM & *fcm* (fig. eâdem) sunt etiam similia (61.); ergo latera correspondentia FC & *fc*, adeoque FE & *fe* sunt inter se ut altitudines, seu perpendiculares CM & *cm* è vertice in bases ductæ (71.): sed hæ perpendiculares sunt radii recti; ergo latera homologa sunt radiis rectis proportionalia. Quod erat 2um.

COROLLARIUM.

95. In polygonis similibus radii tùm recti, tùm obliqui sunt lateribus homologis proportionales

(94.); ergo etiam inter se proportionales sunt (Alg. 52.)

THEOREMA XII.

96. *Ubi duæ figuræ sunt similes, earum perimetri sunt inter se ut homologa figurarum latera.* (fig. 61.)

Sint duæ figuræ *a b c d e f g* & ABCDEFG, quæ supponuntur similes. Dico perimetrum primæ esse ad perimetrum secundæ, ut latus *ab* primæ est ad latus homologum AB secundæ.

DEMONSTRATIO.

Cùm similes supponantur duæ illæ figuræ latera unius homologis alterius lateribus proportionalia sunt; id est, *ab*. AB : : *bc*. BC : : *cd*. CD : : *de*. DE : : *ef*. EF : : *fg*. FG : : *ga*. GA. adsunt igitur plures rationes æquales : proindè summa antecedentium (Alg. 106.) est ad summam consequentium ut unicus antecedens est ad suum consequentem : atqui summa antecedentium est primæ figuræ perimeter, seu omnia latera simul sumpta; & summa consequentium est quoque perimeter secundæ; ergo 1æ figuræ perimeter est ad perimetrum 2æ, ut *ab* ad AB, vel ut *bc* ad BC. Quod E. D.

COROLLARIUM.

97. Cum in polygonis similibus radii tum recti, tum obliqui sint etiam inter se ut latera homologa (94); consequens est perimetros esse quoque inter se ut radios sivè rectos, sivè obliquos. (Alg. 52.)

THEOREMA XIII.

98. *Peripheriæ circulorum inæqualium sunt inter se ut radii.*

DEMONSTRATIO.

Constat in figuris regularibus similibus perimetros esse inter se, ut radios rectos aut obliquos (97); porrò circuli spectari possunt ut polygona regularia & similia infinitorum laterum (92); proindè eorum perimetri, id est, eorum peripheriæ sunt inter se ut radii.

COROLLARIUM.

99. Cùm radii sint inter se ut peripheriæ, sunt quoque inter se ut semiperipheriæ, ut quadrantes, & generatim ut arcus similes, hoc est, ejusdem graduum numeri. Undè in duobus circulis, radius unius est ad radium alterius ut arcus 30 graduum primi est ad arcum 30 graduum secundi. Cùm verò radii sint mediæ diametrorum partes, in duobus circulis ratio diametrorum æqualis est rationi radiorum; proindè diametri sunt inter se ut peripheriæ, nec non ut arcus similes; si v. g. circuli unius diameter diametri alterius circuli dupla sit, peripheria primi dupla erit peripheriæ secundi.

THEOREMA XIV.

100. *In circulorum peripheriis arcus similes* DE & BC *sunt inter se ut chordæ eos subtendentes.* (fig. 62.)

DEMONSTRATIO.

Ductis è centro communi A radiis ad extremitates chordarum ED & CB, aderunt duo triangula similia ACB & ADE, in quibus latera seu chordæ CB & ED sunt inter se ut latera, seu radii AC & AE : sed arcus similes BC & DE sunt etiam inter se ut radii AC & AE (99); ergo &c.

THEOREMA XV.

101. *Latus exagoni regularis circulo inscripti radio circuli æquale est.*

DEMONSTRATIO.

A centro C (fig. 63.) suprà extremitates lateris AB exagoni ducantur radii CA & CB : dico latus illud radio æquale esse; in triangulo enim ACB, angulus C pro mensurâ habet arcum AB, qui est 60 graduum, cùm sit peripheriæ pars sexta : ergò alii duo anguli A & B, simul sumpti, æquivalent 120 gradibus : atqui duo illi anguli æquales sunt, quia opponuntur lateribus æqualibus nempè radiis CA & CB; ergo in triangulo ACB tres anguli æquales sunt; ergò latera sunt quoque æqualia (56); consequenter latus AB exagoni æquale est radio circuli circumscripti, Q. E. D.

COROLLARIUM.

102. Ex theoremate sequitur perimetrum exagoni regularis circulo inscripti sexties continere seu sexties majorem esse radio circuli, & proindè ter majorem esse diametro : atqui circuli periphe-

ria exagoni inſcripti perimetro major eſt : ergò circuli peripheria plus quàm ter ipſius diametro major eſt, id eſt, ratio peripheriæ ad diametrum major eſt ratione 3 ad 1, aut 21 ad 7. probavit *Archimedes* rationem illam eſſe quoque paulò majorem ratione $21\frac{70}{71}$ ad 7, minorem verò ratione 22 ad 7. Demonſtravit poſtmodùm *Metius* rationem eandem eſſe quoque minorem ratione 355 ad 113. Igitur ratio exacta peripheriæ ad diametrum, à pluribus Geometris, iiſdemque profundiſſimis, inutiliter inveſtigata, inter duas has rationes conſiſtit, nempè, $21\frac{112}{113}$ ad 7 & $21\frac{111}{112}$ ad 7 qui limites valdè arcti ſunt. In uſu communi ſupponitur relationem diametri ad peripheriam eſſe ut 7 ad 22 : vel ut 113 ad 355, ſi majori præciſione opus ſit.

PROBLEMA III.

103. *Invenire valorem anguli in centro & valorem anguli in peripheriâ polygoni regularis*, v. g. *pentagoni.*

RESOLUTIO.

1°. Quod ſpectat angulum in centro divide peripheriam, id eſt, 360 gradus per numerum laterum polygoni; quotus erit menſura anguli in centro : ut igitur valor anguli in centro pentagoni dignoſcatur, dividendi ſunt 360 gradus per 5, quotus 72 indicabit angulum ACB (fig. 64.) eſſe 72 graduum; quod quidem evidens eſt, cùm angulus in centro pentagoni pro menſurâ habeat quintam partem peripheriæ circuli, cui inſcribi poteſt.

2°. Cognito valore anguli in centro facilè cognoſci poteſt angulus peripheriæ, ut ABD : etenim in triangulo ACB angulus in centro + duo anguli ſupra latus AB, id eſt, tres anguli trianguli duobus rectis æquales ſunt; atqui angulus ABD duobus angulis ſuprà latus AB ſimul ſumptis æqualis eſt; quoniam eorum quilibet non eſt niſi media pars anguli in peripheriâ, ut patet ex demonſtratione Theorem. decimi : ergo angulus in centro & angulus in peripheria ſimul ſumpti duobus rectis æquivalent; conſequenter ſi ex 180 gradibus, qui duorum rectorum menſura ſunt, ſubtrahatur valor anguli in centro, reſiduum erit valor anguli in peripheriâ; v. g. angulus in peripheriâ pentagoni eſt 108 graduum, quia ex 180 ſubtrahendo valorem anguli in centro = 72, reſiduum eſt 108.

Ex hoc problemate ſequitur angulum in centro polygoni regularis eò eſſe minorem, angulum verò in peripheriâ eò eſſe majorem, quò polygonum plura habet latera.

PROBLEMA IV.

104. *Invenire, quantum fieri poteſt, peripheriam circuli, cujus nota eſt diameter.*

RESOLUTIO.

Sit circulus, cujus diameter 800 pedes habeat : ut inveniatur peripheria, utendum relatione Archimedis, nempè 7 ad 22, atque inſtituenda regula trium, cujus terminus primus ſit 7, ſecundus 22, & tertius 800; quartus peripheriam dabit; reperietur autem quartus ille terminus, duos medios 22 & 800 per invicem multiplicando, productumque 17600 dividendo per 7 : quotus $2514\frac{2}{7}$ indicat quod ſi diameter circuli alicujus ſit 800 pedum, peripheria erit circiter 2514 pedum + $\frac{2}{7}$ unius pedis.

DEFINITIO X.

105. *Area* ſeu *ſuperficies* figuræ eſt ſpatium in eâ comprehenſum. Quemadmodum punctis conſtat linea, ità ſuperficies conſtat lineis, aliis juxtà alias poſitis : elementa igitur ſuperficierum ſeu arearum ſunt lineæ : porrò concipi nequit lineis ſine latitudine ſpectatis conſtare ſuperficiem; ideòque ſpectari debent lineæ illæ ut donatæ latitudine infinitè parvâ, quæ eadem ſit in ſingulis lineis, quæ ſuperficiei elementa ſunt.

COROLLARIUM.

106. Igitur parallelogrammi elementa ſunt infinitæ lineæ parallelæ, & baſi æquales, quæ ſpatium inter parallelogrammi latera comprehenſum replent (fig. 65). Pariter elementa trianguli ſunt infinitæ lineæ baſi parallelæ, quæ eò ſunt breviores, quò plus à baſi diſtant (fig. 66). Elementa circuli ſunt infinitæ peripheriæ concentricæ. Ità de aliis. Pro figurarum elementis aſſumuntur quoque ſuperficies infinitè parvæ, quarum ſumma figuram replet : v. g. dici poteſt, elementa parallelogrammi eſſe infinita parallelogramma, quæ

I

eandem habent basim ac parallelogrammum totale, necnon altitudinem infinitè parvam. Pariter pro trianguli elementis assumi possunt infinita triangula quæ eandem habent altitudinem ac triangulum totale, quæque singula pro basi habent partem infinitè parvam baseos trianguli (fig. 67). Possunt quoque pro circuli elementis assumi triangula infinitè parva, quorum vertex sit in centro, & quæ pro basi habeant partem peripheriæ, infinitè parvam.

SCHOLION I.

107. *In demonstrationibus nostris utemur primis elementis, seu lineis quæ spectantur ut latitudinem infinitè parvam habentes. Porrò elementorum illorum numerus in parallelogrammis & triangulis mensuratur per perpendiculares ad basim, quæ sunt altitudines: ita ut si parallelogrammi unius altitudo dupla sit altitudinis alterius, numerus elementorum primi duplus sit numeri elementorum secundi; si altitudo sit tripla, numerus &c. in circulo autem numerus peripheriarum concentricarum, quæ ejus sunt elementa, per radium mensuratur, quia, cum circulus peripheriis repletus supponatur, evidens est peripheriarum numerum numero punctorum radii æqualem esse.*

SCHOLION II.

108. *Duæ figuræ planæ dicuntur æquales, ubi area unius areæ alterius æqualis est, tametsi primæ latera secundæ lateribus inæqualia sint:* v. g. *ut duo triangula dicantur æqualia, satis est si areas habeant æquales; immò & triangulum parallelogrammo æquale dicitur, ubi tantam aream ac parallelogrammum continet: verum ubi figuræ duæ æquales habent areas, atque latera & anguli unius lateribus, atque angulis alterius æqualia sunt, alterum alteri, tunc in omnibus æquales dicuntur.*

AXIOMA.

109. Duo rectangula ejusdem baseos & altitudinis in omnibus æqualia sunt: si enim duo illa rectangula sibi invicem applicata concipiantur, perfectè congruent.

THEOREMA XVI ET FUNDAMENTALE.

110. *Rectangulum & parallelogrammum obliquangulum ejusdem baseos & altitudinis æqualia sunt.*

Sit rectangulum ABCD & parallelogrammum EBCF, (fig. 68), quæ eandem habent basim nempè BC, eamdemque habent altitudinem, cùm sint inter easdem parallelas. Demonstrandum æquales esse eorum areas.

DEMONSTRATIO.

Æquales sunt duæ areæ, ubi elementa unius elementis alterius æqualia sunt, atque eorum numerus in utrâque figurâ æqualis est: atqui 1°. rectanguli elementa parallelogrammi elementis æqualia sunt, cùm elementa unius & alterius figuræ, ut GH & KL, basi communi BC æqualia sint: 2°. elementorum numerus in utrâque figurâ æqualis est, cùm eadem utrimque sit altitudo. Q. E. D.

SCHOLION.

111. *Adversùs hanc demonstrationem objici forsasse posset in parallelogrammo plura contineri elementa quam in rectangulo, quia in parallelogrammo tot sunt elementa, aut lineæ basi parallelæ, quot in latere* EB *occurrunt puncta: pariter tot sunt hujusmodi elementa in rectangulo, quot sunt puncta in latere* AB. *Porrò in obliquâ* EB *plura sunt puncta quam in perpendiculari* AB.

Verum cuilibet animadvertenti apertum fit, quòd si elementa hinc & indè assumantur latitudine prorsùs æqualia, plura non occurrant in parallelogrammo quam in rectangulo; siquidem, ductis utrimque tot lineis basi parallelis, quot sunt puncta in rectanguli latere AB, *utraque area fit exactè impleta. Hæc autem elementa, ob parallelogrammi laterum inclinationem, majora in iis occupant puncta, quam in rectanguli lateribus: hincque fit ut si in parallelogrammi latere* EG *assumantur puncta, punctis in latere* AB *assumptis, æqualia, & per ea ducantur elementa, hæc quidem numero plura futura sint, sed & simul latitudine minora; adeòque &c.*

COROLLARIUM.

112. Duo parallelogramma obliquangula, quæ altitudines habent æquales, seu, (quod idem est) quæ sunt inter easdem parallelas, quæque bases æquales habent, areas habent æquales: id ex theoremate necessariò sequitur, quia parallelogrammorum illorum quodlibet rectangulo ejusdem baseos & altitudinis æquale est.

THEOREMA XVII.

113. *Triangulum quodcumque* ABD (fig. 69.) *æquale est dimidiæ parti parallelogrammi ejusdem basis & altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Si constructur parallelogrammum ABDC, cujus latus AB & basis BD sint duo trianguli propositi latera, perspicuum fit hujus parallelogrammi aream in duo triangula prorsùs æqualia, adeòque in duas partes æquales dividi per tertium trianguli latus AD, diagonalis vices gerens (80); igitur triangulum ABD est pars media parallelogrammi ABDC ejusdem cum triangulo baseos & altitudinis.

Levi attentione datâ patebit eandem obtinere demonstrationem cujuscumque speciei fuerit triangulum, sive rectangulum, sive acutangulum, sive obtusangulum.

COROLLARIUM I.

114. Duo triangula, ut ABD & EGH, (fig. 69.) quæ æquales habent altitudines, aut quæ sunt inter easdem parallelas, basesque habent æquales, areis æqualia sunt: etenim triangula hæc (ex theoremate præcedenti) sunt dimidia parallelogrammorum AD & EH, quæ eandem cum triangulis altitudinem habent & basim: sed parallelogramma illa sunt æqualia (112); ergò eorum quoque dimidia sunt æqualia. Pariter si triangula sint æqualia, eandemque habeant altitudinem, eandem habebunt basim: si verò æqualia sint, eandemque habeant basim, ejusdem quoque altitudinis erunt: omnia hæc ex dictis manifesta sunt.

COROLLARIUM II.

115. Triangulum, ut CEG, (fig. 70) eandem habens basim ac parallelogrammum CB, altitudinem verò duplam altitudinis parallelogrammi, areâ ipsi æquale est: etenim aliud supponamus parallelogrammum ejusdem cum triangulo baseos & altitudinis, evidens est triangulum, sicut & parallelogrammum CB non esse nisi dimidium alterius hujus parallelogrammi, & proindè parallelogrammo CB æquale est triangulum CEG (Alg. 53).

COROLLARIUM III.

116. Triangulum, ut CAE, (fig. 71) eandem habens altitudinem ac parallelogrammum, ut AD, basim verò duplam, areâ ipsi æquale est: id patet ex Corollario 2°.

THEOREMA XVIII.

117. *Area circuli æqualis est areæ trianguli, cujus altitudo circuli radio, basis verò peripheriæ est æqualis.* (*fig.* 28.)

DEMONSTRATIO.

Demonstrata erit theorematis veritas, si probetur circuli & trianguli prædicti elementa esse numero & magnitudine æqualia: atqui 1° hæc elementa sunt utrimque numero æqualia, siquidem peripheriarum concentricarum & linearum basi parallelarum numerus mensuretur per eandem lineam AC quæ simul est circuli radius & trianguli altitudo. 2°. Hæc elementa magnitudine æqualia sunt, sive quælibet peripheria concentrica, basi sibi correspondenti æqualis est; nam AD. *ad* : : AC. *ac* (98); pariterque AB. *ab* : : AC. *ac* (71); ergò AD. *ad* : : AB. *ab*, (Algeb. 52.) & *alternando*, AD. AB : : *ad*. *ab* : sed AD = AB, per hypotesim; ergò *ad* = *ab*. Eodem modo demonstrari potest quamlibet peripheriam elementarem basi elementari sibi correspondenti esse æqualem; ergò elementa utrimque & numero & magnitudine æqualia sunt; adeòque areæ æquales. Q. E. D.

COROLLARIUM

118. Cùm igitur triangulum rectangulum triangulo cuicumque ejusdem baseos, ejusdemque altitudinis æquale sit, (114) dici potest generatim circulum areâ æqualem esse triangulo cuilibet, pro altitudine radium circuli, pro basi autem lineam rectam peripheriæ æqualem habenti.

DEFINITIO.

119. Arearum mensuræ sunt exiguæ superficies notæ & determinatæ, ut pes quadratus, exapeda quadrata &c. Porrò nomine *pedis quadrati* intelligunt Geometræ superficiem quadratam, cujus latera quatuor seorsim sumpta longitudine pedem unum adæquant; similiter quadratum, cujus quodlibet latus exapedam longitudine æquat, dicitur *exapeda quadrata* &c.

THEOREMA XIX.

120. *Area rectanguli æqualis est producto baseos per altitudinem, aut vice versâ.*

DEMONSTRATIO.

Sit rectangulum ABCD, (fig. 73.) cujus latus AB tres contineat exapedas, basis autem BC quatuor: si multiplicetur 3 per 4, productum erit 12; probandum igitur rectanguli hujus aream 12 exapedas quadratas continere. Ad hoc porrò, rectanguli latus in tres exapedas dividendum, basis verò in quatuor: tùm per puncta divisionis lateris AB, duc parallelas basi; per puncta verò baseos, duc lineas lateribus parallelas; hæ omnes parallelæ exapedas efficient quadratas, ordinibus basi parallelis dispositas, quorum quilibet tot continebit exapedas quadratas, quot secundum longitudinem occurrunt in basi exapedæ, id est, 4: aliundè verò tot erunt exapedarum quadratarum series, quot sunt in latere rectanguli exapedæ secundum longitudinem, id est 3; ergò exapedarum quadratarum rectanguli summa æqualis est ter quatuor exapedis, quæ sunt productum numeri exapedarum baseos per numerum exapedarum lateris. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

121. Area parallelogrammi obliquanguli æqualis est producto baseos per altitudinem: omne enim parallelogrammum rectangulo ejusdem baseos & altitudinis æquale est (110): porrò ut habeatur area rectanguli, multiplicanda basis per altitudinem, ex theoremate præced.) : proindè ad inveniendam parallelogrammi aream, multiplicanda quoque basis per altitudinem.

Nota autem in parallelogrammo non rectangulo altitudinem, à latere angulum cum basi efficiente, diversam esse; quia desumitur altitudo hæc à perpendiculari inter ambas bases ductâ: verùm ubi parallelogrammum est rectangulum, cum tunc ad bases perpendiculare sit latus, parallelogrammi altitudinem metitur.

COROLLARIUM II.

122. *Area trianguli cujuscumque æqualis est producto baseos per dimidium altitudinis, aut vice versâ*: nam (ex Theor. 17.) triangulum quodcumque æquale est dimidiæ parti parallelogrammi ejusdem basis & altitudinis.

THEOREMA XX.

123. *Area pentagoni exagoni & cujuslibet alterius polygoni regularis æqualis est producto radii recti per dimidium perimetri.*

DEMONSTRATIO.

Area polygoni regularis æqualis est areæ omnium triangulorum quæ in eo efformari possunt ducendo radios è polygoni centro ad omnes illius angulos: atqui, cum hæc triangula, ob polygoni regularitatem, ejusdem sint basis & altitudinis (81 & 87), eorum area æqualis est areæ majoris trianguli ejusdem altitudinis, cujus basis æquat summam basium exiguorum triangulorum, seu polygoni perimetrum; igitur cum hujus posterioris trianguli area æqualis sit producto altitudinis per dimidiam basim (122) area polygoni regularis æqualis esse debet producto radii recti per dimidium perimetri. Q. E. D.

THEOREMA XXI.

124. *Area circuli æqualis est producto radii per dimidium peripheriæ.*

DEMONSTRATIO.

Area circuli æqualis est areæ trianguli cujus altitudo circuli radio, basis verò peripheriæ æqualis est (117): atqui hujus trianguli area æqualis est producto dimidiæ basis per altitudinem (122); ergò area circuli æqualis est producto radii per dimidium peripheriæ.

DEFINITIO XI.

125. In superficierum mensurâ, *producentia* dicuntur lineæ quædam, quarum producto æquales sunt superficies planæ: sic in parallelogrammo producentia, sunt altitudo & basis. Porrò per hæc producentia innotescit arearum relatio.

THEOREMA XXII.

126. *Parallelogramma sunt inter se in ratione compositâ basium & altitudinum, seu producentium.*

DEMONSTRATIO.

Quodlibet parallelogrammum æquat productum basis per altitudinem (121); adeòque parallelogramma sunt inter se ut producta basium per altitudines: sed hæc producta sunt in ratione compositâ radicum, seu basium & altitudinum;

nam si unum parallelogrammum vocetur P, alterum autem p; altitudo & basis primi A & B; secundi vero a & b; erit $P = AB$ & $p = ab$; adeoque $P . p :: AB . ab$; sed ratio $\frac{AB}{ab} = \frac{A}{a} \bowtie \frac{B}{b}$ (Alg. 110); ergò parallelogramma sunt in ratione compositâ basium & altitudinum. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

127. Triangula sunt etiam in ratione compositâ basium & altitudinum; nam sunt mediæ partes parallelogrammorum ejusdem baseos & altitudinis (113): atqui ratio occurrens inter partes medias æqualis est rationi occurrenti inter tota (Alg. 57.); ergò.

COROLLARIUM II.

128. Polygona regularia sunt inter se in ratione composita radiorum rectorum & perimetrorum: nam quodlibet polygonum regulare æquale est producto radii recti per dimidium perimetri, vel perimetri per dimidium radii (122): sed hæc producta sunt in ratione compositâ radicum (126); ergò &c.

COROLLARIUM III.

129. Duo circuli sunt inter se in ratione compositâ radiorum & peripheriarum: quod eodem modo demonstratur, ac præcedens Corollarium.

COROLLARIUM IV.

130. Si prædictæ superficies dimensionem unam habeant communem, sive utrimque æqualem, erunt inter se ut dimensiones inæquales; idest:

1°. Si duo parallelogramma v.g., aut triangula, æqualem habeant altitudinem, erunt inter se ut bases; nam ubi duæ magnitudines per tertiam multiplicantur, producta sunt inter se ut quantitates multiplicandæ (Algeb. 58.)

2°. Si æqualem habuerint basim, erunt inter se ut altitudines; ob eandem rationem.

COROLLARIUM V.

131. Si superficiei unius dimensiones alterius dimensionibus fuerint reciprocæ, superficies erunt æquales: nam, in hypothesi, erit $A . a :: b . B$; adeoque $AB = ab$; sed $P . p :: AB . ab$; ergò $P = p$.

THEOREMA XXIII.

132. *Parallelogramma similia sunt in ratione duplicatâ altitudinum & basium.*

DEMONSTRATIO.

Parallelogramma sunt in ratione compositâ basium & altitudinum (126); igitur si ratio basium sit æqualis rationi altitudinum, hæc ratio composita erit duplicata (Alg. 112): atqui ubi parallelogramma sunt similia, ratio basium rationi altitudinum æqualis est; nam in parallelogrammis similibus altitudines sunt basibus proportionales, sive $A . a :: B . b$ (93); ergò &c.

COROLLARIUM I.

133. Igitur parallelogramma similia sunt inter se ut quadrata altitudinum, vel basium, vel quorumcumque laterum homologorum; ideſt $P . p :: AA . aa :: BB . bb$; nam (ex theoremate præcedenti) P & p sunt inter se in ratione duplicatâ basium & altitudinum: atqui ratio occurrens inter terminos rationis duplicatæ, æqualis est rationi quam inter se habent quadrata terminorum alterutrius rationis componentis (Alg. 117); ergò.

COROLLARIUM II.

134. Triangula similia sunt in ratione duplicatâ basium & altitudinum; adeòque sunt etiam inter se ut quadrata basium vel altitudinum, vel etiam laterum homologorum; siquidem triangula similia sint partes mediæ parallelogrammorum similium; atqui eadem est medietatum & totorum ratio (Alg. 57.); ergò.

THEOREMA XXIV.

135. *Polygona regularia & similia sunt inter se in ratione duplicatâ perimetrorum & radiorum rectorum.*

DEMONSTRATIO.

Polygona regularia sunt inter se in ratione compositâ perimetrorum & radiorum rectorum (128.): atqui, ubi polygona similia sunt, perimetri radiis rectis sunt proportionales (97.); adeoque rationes inter eos occurrentes sunt æquales; proindè ratio ex iis composita est duplicata (Alg. 112). Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

136. Polygona regularia ſimilia 1°. ſunt inter ſe ut quadrata perimetrorum, aut radiorum, tùm rectorum, tùm obliquorum. 2°. Sunt etiam inter ſe ut quadrata laterum homologorum (ex Corrol. 1° Theor. præced.)

COROLLARIUM II.

137. Superficies circulorum ſunt inter ſe ut quadrata peripheriarum, aut radiorum, aut diametrorum; nam circuli ſunt polygona infinitaria ſimilia, quibus conſequenter convenit quidquid de aliis polygonis ſimilibus diximus.

PROBLEMA V.

138. *In triangulo rectangulo quadratum hypothenuſæ quadratis reliquorum laterum æquale eſt.*

DEMONSTRATIO.

Sit triangulum rectangulum ABC, (fig. 74.) in quo BC eſt hypothenuſa. Dico quadratum lateris BC ſcilicet BF æquale eſſe ſummæ quadratorum AH & AL, quæ ſunt quadrata aliorum laterum. Ut id demonſtrem, à puncto A anguli recti vertice, duco lineam ADG perpendicularem ſuprà hypothenuſam; ſecabit ipſa quadratum BF in duo rectangula BG & DF : probandum eſt quòd BG æquale ſit AH quadrato lateris AB, & DF æquale AL quadrato lateris AC : ſic autem probo : 1° latus AB eſt medium proportionale inter hypothenuſam BC & ſegmentum BD (70) atqui BE = BC; ergò BE. AB : : AB. BD : ſed productum extremorum eſt rectangulum BG, & productum mediorum eſt quadratum lateris AB; ergò rectangulum BG æquale eſt quadrato lateris AB. 2° Latus AC eſt etiam medium proportionale inter baſim BC & alteram partem DC (70) : ſed BC = CF; ergò CF. AC : : AC. DC; ergò rectangulum DE, quod eſt productum extremorum, æquale eſt quadrato lateris AC, quod eſt productum mediorum. Habemus igitur rectangulum BG æquale quadrato lateris AB, & rectangulum DF æquale quadrato lateris AC : atqui duo hæc rectangula ſunt ambæ partes quadrati BF, ergò quadratum BF quod eſt quadratum hypothenuſæ, æquale eſt quadrato lateris AB + quadrato lateris AC. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

139. In omni quadrato, ut AE, (fig. 75.) quadratum diagonalis BC eſt duplum quadrati AE : diagonalis enim BC eſt hypotenuſa trianguli rectanguli BAC; proindè quadratum diagonalis æquale eſt quadratis linearum AB & AC : atqui duæ illæ lineæ AB & AC ſunt æquales, utpotè quadrati latera; ergò earum quadrata ſunt æqualia; ergò quadratum diagonalis eſt duplum cujuſlibet ex his quadratis; adeòque, &c.

COROLLARIUM II.

140. Si AB = 2 & AC = 2, erit $BC^2 = 8$, conſequenter BC æquale radici quadratæ numeri 8 : ſed hæc radix (idem dic de aliis ſimilibus) unitati incommenſurabilis eſt; quare diagonalis quadrati lateri eſt incommenſurabilis.

COROLLARIUM III.

141. Facilè conſtrui poteſt quadratum duobus, aut pluribus datis, ſimul ſumptis, æquale; ſi 1° latera duorum quadratorum AB & AC (fig. 76.) jungantur ad angulos rectos : dein ſuper ductâ hypothenusâ BC erigatur perpendiculariter latus tertii quadrati CD, ducaturque hypothenuſa BD & ſic deinceps : eſt enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$; & $BD^2 = BC^2 + CD^2$; adeòque $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c. Eâdem prorſus methodo inveniri poteſt circulus duobus aut pluribus datis æqualis; diametros nempè, vel radios diſponendo adinſtar laterum prædictorum quadratorum, & ducendo peripheriam cujus hypothenuſa ſit diameter aut radius. Quippè demonſtratum eſt (115) circulos eſſe inter ſe ut quadrata diametrorum aut radiorum.

PROBLEMA VI.

142. *Metiri ſuperficiem planam cujus innoteſcunt latitudo & altitudo : v. g. invenire aream ſuperficiei planæ cujus altitudo ſit 34 exap. 2 ped. 8 poll.; baſis verò, ſeu latitudo, 23 exap. 4 ped. 6 poll.*

OBSERVATIO.

143. Menſura ſuperficiei planæ eſt exapeda quadrata, vel exapedæ quadratæ portio; quare

metiri ſuperficiem planam eſt inquirere quot exapedas quadratas, aut exapedæ quadratæ portiones complectatur. Quotieſcumque ſuperficiei menſurandæ dimenſiones homogeneæ ſunt, tunc facilè invenitur area, aſſumendo productum baſis per altitudinem; ſed difficilior eſt æſtimatio ubi dimenſiones heterogeneæ ſunt, ut in exemplo propoſito. Equidem tunc æſtimari poteſt ſuperficies reducendo dimenſiones ad ſpeciem infimam, & dividendo productum per quadratum numeri exprimentis quoties ſpecies major minorem complectitur; ſed cum hæc operatio longior ſit & tædio plena; hìc paucis tradere lubet breviorem, innixam modo dividendi exapedam quadratam hìc exponendo.

1°. Exapedæ quadratæ ABCD (fig. 77.) latus AB divido in 6 partes æquales quarum unaquæque pedi æqualis eſt, dein, per puncta diviſionis, duco uſque ad latus CD lineas baſi parallelas, quibus exapeda dividitur in 6 rectangula æqualia, quæ dicuntur *pedes exapedæ quadratæ*, quia eorum altitudo eſt pedis unius, baſis verò unius exapedæ.

2°. Unumquemque exapedæ pedem divido in 12 rectangula æqualia *mm*, *rr*, &c, quæ nuncupantur *pollices exapedæ quadratæ*, quià eorum altitudo pollici, baſis verò exapedæ æquatur. Eadem ratione pollex quilibet in 12 rectangula diſtribuitur quæ *lineæ exapedæ quadratæ* dicuntur. Hæc diviſio ſuperficierum compoſitioni apprimè congruit: nam productum unius exapedæ v. g. per pedem unum, neque eſt exapeda quadrata, neque pes quadratus, ſed parallelogrammum cujus baſis exapedam, altitudo verò pedem adæquat; & ſic de cæteris. His notatis.

PROBLEMATIS RESOLUTIO.

144. 1°. Exapedas per invicem multiplico, quaſi ſolæ forent, productumque ſub multiplicatore appono.

2°. Multiplicandi exapedas multiplico per pedes multiplicatoris, dicens: ſi 34 exap. per unam multiplicarem, productum foret 34 exap.; ſed cum hunc numerum præciſè multiplicem per 4 ped., qui ſunt duæ partes tertiæ unius exapedæ, productum erit = duabus partibus tertiis 34 exap. = 22 exap. 4 poll.

3°. Quoniam 6 poll. ſunt pars octava 4 pedum, vel 48 poll.; ſumenda pars octava præcedentis producti, ſc. 2 exap. 5 ped.

4°. Operor ſupra reliquas multiplicandi partes, pedes nempè & pollices; incipienſque à pedibus dico, ſi multiplicare deberem 23 exap. 4 ped. 6 poll., per exapedam unam, productum foret = 23 exap. 4 ped. 6 poll.; ſed cum multiplicator ſit dumtaxat pars tertia exapedæ, productum erit tantum tertia pars producti mox allati, = 7 exap. 5 ped. 6 poll.

5°. Quoniam 8 pollices ſunt tertia pars 2 ped. ſumo tertiam præcedentis producti partem, ſc. 2 exap. 3 ped. 10 poll.

34 Exap.	2 Ped.	8 Poll.
23	4	6
102		
68		
22	4	
2	5	
7	5	6
2	3	10
818	0	4
exapedæ quadratæ	pedes exa. quadratæ	pollices ex. quadratæ

6°. Demùm hæc omnia producta ſimul addo obtineturque productum totale, nempè 818 exapedæ quadratæ + 4 pollices exapedæ quadratæ.

CAPUT III.

DE CORPORIBUS SEU SOLIDIS.

145. Inter corpora diverſarum figurarum ſpectantur potiſſimùm *priſmata*, *cylindri*, *pyramides* & *coni*.

DEFINITIONES.

146. *Priſma* eſt corpus æqualem in totâ ſuâ longitudidine craſſitudinem habens, & cujus baſes ſuperior & inferior, ſi parallelæ fuerint, ſunt polygona omninò æqualia. *Pyramis* eſt corpus cujus baſis eſt polygonum, quodque in apicem deſinit. Priſma & pyramis varia mutuantur nomina juxtà numerum laterum baſeos; ſi baſis fuerit triangulum, priſma dicitur *triangulare*, ſi pentagonum, dicitur *pentagonale* &c. idem de pyramide puta. Una quoque diſtinguitur priſmatis ſpecies, quæ dicitur *parallelepipedum*, cujus baſis eſt parallelogrammum. *Cylindrus* eſt corpus rotundum, cujus craſſitudo in totâ ſuâ longitudine æqualis eſt, & cujus baſes ſunt circuli æquales, ex hypotheſi quòd baſes illæ ad latus fuerint perpendiculares. *Conus* eſt corpus in apicem deſinens, cujus baſis eſt circulus.

ANNOTATIONES.

147. Poteſt ſpectari cylindrus ut priſma, cujus baſis eſt polygonum regulare infinitorum late-

rum. Pariter conus est pyramis, cujus basis est polygonum regulare infinitorum laterum.

148. In cylindro linea à centro basis superioris ad centrum inferioris ducta, dicitur *axis* cylindri; in cono etiam linea ducta ab apice coni ad centrum baseos, vocatur *axis* coni. Possunt quoque concipi axes in prismatibus & pyramidibus, quarum bases sunt polygona regularia.

149. Ubi axes basibus sunt perpendiculares, prismata, cylindri, pyramides & coni, dicuntur *recti*; è contrà ubi axes basibus sunt obliqui, obliqua dicuntur corpora illa.

DE SUPERFICIE SOLIDORUM.

150. Linea, ut A*a*, (fig. 78.) quæ basi prismatis recti perpendicularis supponitur, circà hanc basim volvatur semper perpendiculum servans, convexam, seu lateralem prismatis superficiem describet, id est, ambitum, demptis ambabus basibus: pariter si linea, ut A*a*, (fig. 79.) cylindri recti basi semper perpendicularis manens, basis hujus circumferentiam percurrat, cylindri describet superficiem. Quòd si de pyramide agatur vel cono (fig. 80 & 81.) concipienda est linea vertici A affixa, quæ circà pyramidem vel conum revolvatur, describet ipsa solidorum illorum superficiem.

151. Magis adhuc innotescit prismatis recti superficies, (fig. 78.) imaginando chartæ fasciculam circùm *prisma* agglutinatam; evidens enim est quòd si detrahatur fascicula hæc & evolvatur, appareat rectangulum, eandem cum prismate altitudinem habens, pro basi verò lineam rectam perimetro baseos prismatis æqualem: rectangulum illud, prismatis superficiei necessariò æquale, vocari potest prismatis *evolutio*. Cylindri evolutio est quoque rectangulum habens pro basi lineam peripheriæ baseos cylindri æqualem, eandemque habens cum cylindro altitudinem. (fig. 79.)

152. Pyramidis evolutio est summa omnium triangulorum, quæ sunt diversæ illius facies (fig. 80.); igitur horum omnium triangulorum summa est pyramidis superficies. Cùm lineæ omnes rectæ, ut AB, è vertice coni recti ad puncta peripheriæ baseos ductæ sint æquales, (fig. 81.) manifestum est quòd si coni recti evolvatur superficies, evolutio illa futura sit sector circuli, pro radio latus AB coni, & arcum peripheriæ baseos coni æqualem habentis.

153. Ubi pyramidis basis est polygonum regulare, & recta supponitur pyramis, omnia triangula, quæ sunt diversæ illius facies, eandem habent altitudinem, suntque inter se æqualia; consequenter æqualia sunt unico triangulo, quod eandem cum uno triangulorum altitudinem haberet, basimque summæ basium omnium triangulorum, seu perimetro baseos pyramidis, æqualem: igitur superficies pyramidis rectæ, cujus basis est polygonum regulare, æqualis est triangulo, quod habet pro basi perimetrum baseos pyramidis ac eandem altitudinem cum uno triangulorum, quæ pyramidis constituunt facies.

154. Cùm conus non sit nisi pyramis, cujus basis est polygonum regulare infinitorum laterum, superficies coni recti æqualis est triangulo pro basi lineam rectam peripheriæ baseos coni æqualem habenti, pro altitudine verò latus AB coni.

COROLLARIUM I.

155. Ut habeatur prismatis recti superficies, multiplicanda baseos perimeter per prismatis altitudinem; pariter ut cognoscatur cylindri recti superficies, multiplicanda baseos peripheria per cylindri altitudinem.

COROLLARIUM II.

156. Si cylindri recti altitudo diametro baseos æqualis fuerit, cylindri superficies est quadrupla baseos: cylindri namque superficies æqualis est producto peripheriæ baseos per altitudinem integram, quæ est baseos diameter: superficies verò circuli, baseos vices gerentis, æqualis est dumtaxat producto hujus peripheriæ per diametri quadrantem, aut radii dimidium.

COROLLARIUM III.

157. Ut habeatur pyramidis rectæ superficies, cujus basis est polygonum regulare, multiplicanda baseos perimeter per dimidium altitudinis unius ex triangulis, quæ facies constituunt pyramidis; vel multiplicanda altitudo illa per dimidium perimetri; vel demùm trianguli multiplicanda altitudo per perimetrum, & producti assumenda pars media.

COROLLARIUM IV.

158. Ad dignoscendam tandem coni recti superficiem, peripheria baseos multiplicanda per dimidium lateris AB coni; vel multiplicandum latus illud integrum per dimidium peripheriæ; vel denique multiplicandum latus per peripheriam & producti assumendum dimidium. Quòd si latus coni recti æquale fuerit diametro circuli, qui baseos gerit vices, superficies coni est dupla baseos: enim verò superficies coni æqualis est producto peripheriæ baseos per dimidium lateris aut diametri: basis verò æqualis est producto ejusdem peripheriæ per dimidium radii, vel diametri quadrantem; ergò &c.

SCHOLION.

159. *Observabis autem quòd ubi sermo instituitur de superficiebus sive prismatum, sive cylindrorum, sive pyramidum, sive conorum, intelligatur solidorum illorum ambitus, exclusis basibus, nisi contrarium exprimatur; qui quidem ambitus dicitur* superficies convexa. *Quæ igitur Corollariis 1, 3 & 4 dicta sunt, solas spectant solidorum convexas superficies: si autem totales eorumdem solidorum superficies inquisieris, superficiebus convexis adde corporum bases. Summa totalis dabit superficiem totalem.*

DEFINITIO I.

160. *Polyedrum* est solidum quodvis multis constans superficiebus. *Angulus* autem *solidus* est spatium solidum inter superficies planas in puncto concurrentes comprehensum, ità ut superficies illæ non sint in eodem plano. Talis est apex pyramidis.

SCHOLION II.

161. *Ex omnibus polyedris regularibus quinque tantùm terminari possunt per superficies planas; scilicet* tetraëdrum, *constans quatuor triangulis æquilateribus, quorum tria simul sumpta angulos solidos constituunt;* octaedrum *constans octo triangulis æquilateribus, quorum quatuor simul sumpta constituunt angulos solidos;* icosaedrum *constans viginti triangulis æquilateralibus, quorum quinque simul sumpta constituunt angulos solidos;* exaedrum, *seu* cubus, *constans sex quadratis æqualibus, quorum tria simul sumpta constituunt angulos solidos ut in fig. 77: &* dodecaedrum *constans duodecim pentagonis, quorum tria simul sumpta constituunt angulos solidos Hæc quinque polyedra vocari solent corpora regularia.*

PROBLEMA I.

162. *Mensurare superficies tetraedri, octaedri, icosaedri, cubi & dodecaedri?*

RESOLUTIO.

1. Ut habeatur superficies tetraedri, inveniatur superficies unius ex ejus triangulis, & hæc superficies multiplicetur per 4, seu per numerum triangulorum; productum dabit superficiem totalem tetraedri. Eodem modo, proportione servatâ, procede circà octaedrum & icosaedrum.

2. Si agatur de cubo, quærenda est superficies unius ex ejus quadratis, quæ multiplicetur per 6, seu per numerum quadratorum.

3. Quòd spectat dodecaedrum; quæratur superficies unius ex ejus pentagonis, quæ multiplicetur per 12. Omnia hæc ex dictis manifesta sunt.

DEFINITIO II.

163. *Globus*, seu *sphæra* est corpus terminatum per superficiem, cujus singula puncta à puncto quodam medio, quod dicitur *centrum*, æqualiter distant. Generatur sphæra, si semiperipheria circuli circa diametrum revolvatur ut videre est fig. 82.

DEFINITIO III.

164. *Majores* sphæræ *circuli* dicuntur, qui per centrum ejusdem transeunt; *minores* verò, quorum planum per centrum non transit. Axis autem sphæræ est recta per centrum transiens & utrimque in sphæræ superficie terminata.

DEFINITIO IV.

165. *Cylindrus* sphæræ *circumscriptus* ille est qui sphæram comprehendit, ità ut pro basi magnum sphæræ circulum, pro altitudine autem diametrum ejus habeat: sphæra verò in illâ hypothesi, dicitur *inscripta* vide figuram 82am.

DEFINITIO V.

166. Si in cono recto ducatur planum basi parallelum, pars coni inter hoc planum & basim intercepta erit conus vertice truncatus: talis est OBCS. (fig. 81.)

OBSERVATIO I.

167. Superficies lateralis coni recti vertice truncati æqualis est producto lateris per peripheriam ab utrâque basi æqualiter distitam: res aperta fit ubi evolvitur hujusmodi conus, tunc quippè illius superficies trapezium exhibet, cujus bases sunt parallelæ, altitudo verò æqualis lateri coni (154); jam verò superficiem hujusce trapezii æqualem esse producto lateris, seu altitudinis, per lineam ab utrâque basi æqualiter distitam, sic breviter demonstratur: in trapezio ACDB (fig. 83.) duc rectam LH æqualiter distitam à basibus parallelis CD & AB; dein duc lineam EP lateri AC parallelam, erunt triangula BHE & PHD in omnibus æqualia, siquidem omnes anguli correspondentes sint utrimque æquales, & latus EH = HP, cum hæ lineæ sint perpendiculares inter spatia parallela æqualia; undè triangulum BHE substitui potest triangulo PHD, quo facto trapezium fiet rectangulum cujus superficies = LH, seu CP, ⋈ AC; adeòque &c.

OBSERVATIO II.

168. Si semiperipheria, suî revolutione circa diametrum, sphæram generans, spectetur ut pars media poligoni regularis infinitorum laterum (fig. 82.) & ex quibuslibet angulis ducantur in diametrum rotationis dL perpendiculares DT, EX, GC; evidens est binas quascumque has lineas, per poligoni revolutionem, efformare totidem conos vertice truncatos OFDB, BDEA &c; jam verò si coni supponantur crassitiei infinitè parvæ,

ſphæram componere intelligentur, nec ab eâ ſenſibiliter different tùm quoad ſuperficiem, tùm quoad ſoliditatem. His notatis.

THEOREMA I.

169. *Superficies ſphæræ æqualis eſt producto peripheriæ majoris illius circuli per axem multiplicatæ; adeòque æqualis ſuperficiei convexæ cylindri circumſcripti.*

Demonſtrata erit theorematis veritas ſi probetur ſuperficiem lateralem cujuſlibet coni vertice truncati ſphæræ compoſitionem ingredientis (168) æqualem eſſe producto ſui axis per periphæriam majoris circuli ſphæræ; hoc enim probato evidens erit ſuperficiem omnium conorum ſphæram conſtituentium æqualem eſſe producto axis ſphæræ per peripheriam majoris illius circuli, quod productum æquale eſt ſuperficiei cylindri circumſcripti (151).

DEMONSTRATIO.

Ex Y puncto medio lateris AB, coni BDEA (fig. 82.) duc lineam YR planis BD & AE parallelam & ab iiſdem æqualiter diſſitam: dein duc lineam YS lateri AB, ſeu tangenti perpendicularem, quæ tranſibit per ſphæræ centrum adeòque tamquam axis haberi poterit: demùm ex puncto B, duc rectam BL baſi AE perpendicularem, adeòque æqualem TX, ſeu axi coni vertice truncati BDEA: his peractis, ſi ducatur linea RS, aderunt duo triangula ABZ & YRS ſimilia; enim verò 1° angulus Z = R, cum uterque ſit rectus; 2° angulus BAZ = RSY; nam, ob parallelas YR & AE, angulus BAZ = BYR: ſed angulus BYR menſuratur per dimidium arcum Y*d*R, non ſecus ac angulus RSY (39); igitur RSY = BAZ, adeòque ARZ = RYS, quare exurgit ſequens proportio, BZ, ſive TX. AB :: YR. YS; conſequenter TX ⋈ YS = AB ⋈ YR: quoniam autem circulorum peripheriæ ſunt inter ſe ut eorumdem diametri, ultima ratio proportionis repræſentare poteſt duos circulos quorum diametri ſint YR & YS, quo ſuppoſito, æquatio mox relata indicat productum axis coni vertice truncati per peripheriam majoris ſphæræ circuli, ſeu TX ⋈ YS, eſſe æquale producto lateris coni AB per peripheriam YR, adeòque æquale ſuperficiei prædicti coni (ex Obſervatione 1ª) undè palam eſt ſuperficiem illius coni æqualem eſſe cylindro, cujus altitudo eſſet æqualis axi coni, baſis verò æqualis peripheriæ majoris circuli ſphæræ. Cum autem eadem demonſtratio applicari queat cuilibet cono ſphæram componenti, manifeſtum eſt ſuperficiem horum omnium conorum, adeòque & ipſius ſphæræ, æqualem eſſe producto peripheriæ majoris circuli ſphæræ per illius axem multiplicatæ, proindè æqualem ſuperficiei cylindri circumſcripti. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

170. Superficies ſphæræ eſt quadruplò major ſuperficie majoris illius circuli. Etenim ad habendam majoris circuli ſuperficiem, multiplicandus quadrans diametri per majoris ſphæræ circuli peripheriam: porrò jam demonſtratum eſt ſphæræ ſuperficiem æquare productum integræ diametri per majoris circuli peripheriam; proindè ſuperficies ſphæræ &c.

COROLLARIUM II.

171. Cùm convexa cylindri circumſcripti ſuperficies ſphæræ ſuperficiem æquet, quatuor majores ſphæræ circulos contineat neceſſe eſt; quibus ſi addantur ambæ cylindri baſes, quæ etiam ſunt majores ſphæræ circuli, cylindri ſuperficies totalis ſex majóres ſphæræ circulos æquabit, proindè totalis ſuperficies cylindri, comprehenſis baſibus, eſt ad ſphæræ inſcriptæ ſuperficiem, ut 6 ad 4, vel ut 3 ad 2.

COROLLARIUM III.

172. Sphæræ ſuperficies æquat ſuperficiem circuli pro radio ſphæræ diametrum, ſeu, diametrum ſphæræ diametri duplam habentis; ex dictis enim ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt majoris circuli, hoc eſt, circuli eandem cum ſphærâ diametrum habentis. Porrò circulus diametrum habens diametri ſphæræ duplam, eſt quoque quadruplus circuli eandem cum ſphærâ diametrum habentis; ſiquidem circuli ſint ut diametrorum quadrata (137): ergò.

DE RELATIONE SUPERFICIERUM SOLIDORUM SIMILIUM.

173. Duo ſolida dicuntur *ſimilia*, quorum plana terminantia numero ſunt æqualia, atque angulos ſolidos correſpondentes conſtituunt æquales. Igitur ut duo corpora dicantur ſimilia, ejuſdem rationis eſſe debent: unde pyramidi priſma ſimile eſſe nequit, neque priſma rectum priſmati obliquo &c.

THEOREMA II.

174. *Ubi duo corpora ſunt ſimilia, ſuperficies ſunt in ratione duplicatâ linearum correſpondentium, ſive ut linearum illarum quadrata.* Agitur autem de ſuperficiebus totalibus, hoc eſt, comprehenduntur baſes & facies.

DEMONSTRATIO.

Si ſuperficies illæ totales ſupponantur evolutæ, evidens eſt evolutiones fore figuras ſimiles. Atqui figuræ ſimiles ſunt inter ſe in ratione duplicatâ linearum correſpondentium, ſive ut li-

nearum illarum quadrata (133) : ergo superficies totales &c.

COROLLARIUM.

175. Cùm sphæræ sint corpora similia, superficies duarum sphærarum sunt in ratione diametrorum duplicatâ, vel, ut diametrorum quadrata.

PROBLEMA II.

176. *Sphæræ superficiem invenire, cujus diameter nota?*

RESOLUTIO.

1°. Majoris sphæræ circuli peripheriam quære, ope relationis approximatæ diametri ad peripheriam (102.)

2°. Peripheriam duc in diametrum; erit factum, seu productum, sphæræ superficies.

DE SOLIDORUM ÆQUALITATE.

177. Quemadmodum lineis constat superficies (105), ita & corpus superficiebus, seu sectionibus plurimis densitatis infinitè parvæ : v. g. constat prisma sectionibus æqualibus atque ad basim parallelis : dicuntur sectiones illæ *solidorum elementa* : in prismatibus & pyramidibus elementa illa sunt prismata recta altitudinis indefinitæ, sed jugiter divisibilis. Porrò ubi conferuntur duo quæcumque corpora, semper supponuntur elementa unius cùm elementis alterius eandem habere altitudinem, seu crassitiem.

SCHOLION I.

178. *Suprà ostensum est quod lineæ unius per alteram multiplicatæ productum det superficiem : si verò per lineam multiplicetur superficies, productum dat solidum, seu corpus : si v. g. prismatis basis per altitudinem multiplicetur, hoc est, si toties assumatur prismatis basis, quot sunt in ipsius altitudine puncta, productum erit ipsum prisma.*

SCHOLION II.

179. *Ubi duo corpora dicuntur æqualia, id semper ad eorum soliditatem referri intelligitur, ita ut duo corpora, quæ varias habent figuras & superficies, nihilominùs æqualia habeantur, si primi soliditas soliditatem æquet secundi.*

THEOREMA III.

180. *Duo prismata ejusdem baseos & altitudinis æqualia sunt, sive alterum fuerit rectum, obliquum alterum; sive utrumque vel rectum vel obliquum fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Æqualia sunt duo prismata, ubi eundem elementorum æqualium numerum habent : atqui duo prismata ejusdem baseos & altitudinis, eundem &c : 1°, Enim elementa habent æqualia, siquidem æquales supponantur bases; 2°, in utroque idem est elementorum numerus, propter altitudinis identitatem. Ergò ambo prismata soliditate æqualia sunt. Q. E. D.

SCHOLION.

181. *Facilè intelligit unusquisque posse demonstrationem illam duobus cylindris ejusdem baseos & altitudinis applicari; immo & si cum cylindro conferatur prisma, eodem argumento æqualia esse comprobabuntur, ubi bases & altitudines easdem habere supponentur.*

THEOREMA IV.

182. *Duæ pyramides ejusdem altitudinis & basis sunt inter se æquales ratione soliditatis, sive una fuerit recta, altera obliqua, sive ambæ aut rectæ, aut obliquæ fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Ambæ pyramides æqualem habent elementorum numerum : siquidem eandem habeant altitudinem : aliundè elementa unius correspondentibus alterius elementis æqualia sunt; cum enim elementa illa à basibus æqualiter distent, eandem ad bases relationem habent, quarum proindè sunt partes similes : porrò bases sunt *per hypothesim* æquales : ergò earum partes similes sunt quoque æquales : ergò æqualia sunt elementa correspondentia : ergò æquales sunt pyramides.

COROLLARIUM.

183. Exinde sequitur conos ejusdem baseos & altitudinis æquales esse, siquidem coni (147) non sunt nisi pyramides, quarum bases sunt polygona regularia infinitorum laterum : undè si cum cono comparetur pyramis, ei censeri debet æqualis, si basis & altitudo fuerint utriusque æquales.

LEMMA.

184. *Pyramis quadrata, cujus altitudo est media pars lateris baseos, est triens prismatis quadrati eandem cum pyramide basim & altitudinem habentis.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur cubus in ſex diviſus pyramides æquales, quæ in centro cubi apices habeant, & quarum quælibet pro baſi unam è cubi faciebus habeat: evidens eſt pyramidem quamlibet eſſe ſextam partem cubi: proindè ſi cubi hujus dimidium reſecetur per planum ad baſim parallelum, pyramis, ejuſdem baſeos & altitudinis ac priſma quadratum poſt ſectionem remanens, erit tertia pars hujus priſmatis: porrò pyramidis hujus quadratæ altitudo eſt dimidium lateris baſis: ergò pyramis quadrata, cujus altitudo eſt media pars lateris baſis, eſt triens priſmatis quadrati ejuſdem baſeos & altitudinis. Q. E. D.

THEOREMA V.

185. *Pyramis quælibet, v. g. pentagonalis, eſt triens priſmatis pentagonalis, baſeos ejuſdem & altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſit alia pyramis quadrata, quæ eandem habeat altitudinem, pro baſi verò quadratum, cujus latus ſit duplum altitudinis: pyramis illa erit tertia pars priſmatis quadrati ejuſdem baſeos & altitudinis (184): porrò cum ambæ pyramides eandem habeant altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes; hoc eſt, ratio pyramidis pentagonalis ad pyramidem quadratam æqualis eſt rationi baſium: pariter ratio amborum priſmatum, pentagonalis & quadrati, æquat rationem baſium: atqui duarum harum proportionum ultima ratio eſt eadem, quia baſes priſmatum eædem ſunt cum pyramidum baſibus: proindè harum proportionum duæ primæ rationes ſunt etiam æquales (Alg. 73), id eſt, ambæ pyramides ſunt inter ſe ut ambo priſmata, & *alternando*, pyramis pentagonalis eſt ad priſma pentagonale ut pyramis quadrata ad priſma quadratum: atqui pyramis quadrata eſt tertia pars priſmatis quadrati (184): ergò & pyramis pentagonalis eſt triens priſmatis pentagonalis: Q. E. D.

Evidens eſt demonſtrationem illam cuilibet pyramidi applicari poſſe, ſi ipſa conferatur cum priſmate ejuſdem baſis & altitudinis.

COROLLARIUM.

186. Cùm conus ſit pyramis, cujus baſis eſt polygonum regulare infinitorum laterum, cylindrus autem priſma infinitorum laterum, coni ſoliditas æquat tertiam partem ſoliditatis cylindri ejuſdem baſis & altitudinis; proindè cylindrus triplo plus habet ſoliditatis quam pyramis.

DE MENSURIS CORPORUM, SEU SOLIDORUM.

187. Menſuræ corporum ſunt exapedæ cubicæ, pedes cubici, pollices cubici &c. exapeda cubica eſt cubus comprehenſus ſex faciebus, quarum quælibet eſt exapeda quadrata. Pariter pes cubicus eſt cubus ſex faciebus comprehenſus, quarum unaquæque eſt pes quadratus.

THEOREMA VI.

188. *Priſmata & cylindri ſunt æqualia producto baſeos per altitudinem.*

Sit priſma, cujus baſis ſex habeat pedes quadratos, altitudo verò tres pedes juxta longitudinem: dico ſoliditatem, hujus priſmatis eſſe 18 pedum cubicorum.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur priſma in tot diviſum ſectiones ad baſim parallelas, quot ſunt in altitudine pedes, hoc eſt, in tres ſectiones, quarum quælibet pede uno alta ſit, cùm tres illæ ſectiones eandem cum priſmate baſim habeant, evidens eſt quod earum quælibet tot pedes cubicos contineat, quot baſis habet pedes quadratos, id eſt, 6. proindè tres ſectiones ſimul ſumptæ, ter ſex, ſeu octodecim pedes cubicos continent: ergò priſmatis ſoliditas æquat productum baſeos per altitudinem. Poteſt hæc demonſtratio, citrà negotium, cylindro applicari.

COROLLARIUM

189. Cùm pyramides & coni ſint trientes priſmatum & cylindrorum ejuſdem baſis & altitudinis (185 & 186) eorum innoteſcet ſoliditas, multiplicando baſim per trientem altitudinis.

THEOREMA VII.

190. *Sphera, quoad ſoliditatem, æquatur pyramidi, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei, altitudo verò radio ſphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur ſuperficies ſphæræ reſoluta in quadratula infinitè exigua à planis non diſſidentia, & ex ſphæræ centro concipiantur rectæ ad eorum

angulos ductæ : hoc facto evidens fit sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines à radiis non differunt, bases verò simul sumptæ superficiei sphæræ æquantur : tota igitur sphæra rectè habetur pro pyramide cujus basis æqualis est superficiei, altitudo verò radio spæræ. Prodit ergò sphæræ soliditas multiplicando illius superficiem per tertiam radii partem (189.) Q. E. D.

SCHOLION.

191. *Quemadmodum figuræ planæ in triangula reduci possunt, ità & solida omnia in pyramides; undè quæ circà solidorum mensuram exposuimus, inservire possunt ad inveniendam corporis cujuslibet soliditatem.*

DE RELATIONE SOLIDORUM.

OBSERVATIO.

192. Ad dignoscendam solidorum relationem, *producentibus* utuntur Geometræ : solidi autem *producentia* dicuntur lineæ, quæ per invicem multiplicandæ sunt ad inveniendam corporis soliditatem ; tria vulgò recensentur producentia ; etenim 1° multiplicantur duæ lineæ per invicem ad habendam superficiem : 2° multiplicatur superficies illa per tertiam aliquam lineam, & productum dat corporis soliditatem : sic in prismate, quale exhibetur (fig. 78. duo priora producentia sunt longitudo AB & latitudo DA, hoc est, lineæ quæ sunt per invicem multiplicandæ ut habeatur basis : tertium verò est profunditas, seu altitudo D*d* prismatis. Quod si agatur de pyramide, tertium producens non est altitudo integra, sed triens solummodò altitudinis (189). Idem de cono puta.

Possunt quoque in solido nonnisi duo producentia spectari, scilicet superficies una, qualis est basis solidi, & linea per quam multiplicatur superficies, ut habeatur soliditas ; tuncque spectatur superficies tamquàm unicum producens.

THEOREMA VIII.

193. *Prismata sunt inter se ut producta basium per altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si duo accipiantur prismata, primum producto suæ baseos per altitudinem æquale est ; pariter & secundum (188) : ergò primum est ad secundum, ut productum baseos primi per altitudinem ejusdem est ad productum baseos secundi per ipsius altitudinem.

COROLLARIUM.

194. Prismata quæ æquales habent bases, sunt ut altitudines : prismata enim illa *per hypothesim* radicem unam communem habent, scilicet basim ; ergò sunt inter se ut radices inæquales, hoc est, altitudines. Pariter prismata quæ altitudines habent æquales, sunt ut bases. Quod si verò altitudo & basis unius prismatis sint reciprocæ altitudini & basi alterius, (Alg. 81.) tunc ambo prismata sunt æqualia. (Alg. 75.)

THEOREMA IX.

195. *Prismata sunt in ratione compositâ baseos ad basim & altitudinis ad altitudinem.*

DEMONSTRATIO.

Si primi prismatis basis cum basi secundi & altitudo primi cum altitudine secundi pariter conferantur, duæ aderunt rationes, quarum basis & altitudo primi prismatis erunt antecedentes, basis verò & altitudo secundi erunt consequentes : atqui primum prisma æquat productum amborum antecedentium (188), secundum autem æquale est producto consequentium : ergò horum prismatum ratio componitur ex rationibus baseos ad basim & altitudinis ad altitudinem.

Hinc si prismatis P altitudo vocetur A, basis vero BC, alterius verò prismatis *p* altitudo & basis dicantur *a* & *bc*, exurget sequens proportio, P. *p* : : ABC. *abc*.

COROLLARIUM I.

196. Ubi altitudinibus proportionales sunt bases, ità ut basis unius sit ad basim alterius, ut altitudo primi ad altitudinem secundi, tunc prismata sunt in ratione duplicatâ basium vel altitudinum. Etenim hoc in casu, cum æquales sint rationes componentes, ratio prismatum, quæ ex his rationibus æqualibus componitur, est necessariò duplicata. (Alg. 112.)

COROLLARIUM II.

197. Ubi altitudinibus proportionales sunt ba-

ſes, ut in Corollario I. priſmata ſunt ut quadrata altitudinum: in hoc enim caſu ratio priſmatum eſt duplicata ex ratione altitudinum (196): porrò ratio quadratorum altitudinum eſt quoque duplicata ex ratione altitudinum (Alg. 116): conſequenter ratio priſmatum æqualis eſt rationi quadratorum altitudinum.

SCHOLION.

198. *Evidens eſt ea omnia, quæ Theoremate VIII & IX. & utriuſque Corollariis, de priſmatibus dicta ſunt, ipſis quoque cylindris competere, ſive inter ſe, ſive cum priſmatibus comparentur. Cùm verò pyramides ſint trientes priſmatum ejuſdem baſis & altitudinis, & proindè ſint inter ſe ut priſmata illa, ipſis quoque competunt, quæ de priſmatibus expoſita fuêre. Idem puta de conis ſive inter ſe, ſive cum pyramidibus conferantur; cum ſint tertiæ partes cylindrorum ejuſdem baſis & altitudinis.*

THEOREMA X.

199. *Duo ſolida ſunt in ratione compoſitâ trium producentium unius ad tria alterius producentia.*

DEMONSTRATIO.

Solida illa ſint, v. g., duo priſmata: poſſunt tria unius producentia ſpectari ut trium rationum antecedentes, quarum tria alterius producentia homologa ſunt conſequentes: atqui primum priſma æquat productum trium antecedentium, ſecundum autem producto trium conſequentium æquale eſt: ergò horum priſmatum ratio componitur ex tribus rationibus producentium unius ad producentia alterius. Q. E. D.

Hinc ſi duo ſolida vocentur P & p, eorum altitudines A & a latitudines B & b longitudines verò C & c, erit $P = ABC$ & $p = abc$; adeòque $P.p :: ABC.abc$: ſive $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$; proindè &c.

COROLLARIUM I.

200. Si tria ſolidi unius producentia tribus alterius ſolidi producentibus proportionalia fuerint, corpora illa ſunt in ratione triplicatâ producentium unius ad producentia alterius. (Alg. 113.) Etenim, ut modo oſtenſum eſt, ratio duorum ſolidorum componitur ex tribus rationibus producentium unius ad producentia alterius: porrò tres illæ rationes ſunt per *hypotheſim* æquales: ergò ratio amborum ſolidorum eſt triplicata, utpotè ex tribus rationibus æqualibus compoſita.

COROLLARIUM II.

201. Si tria ſolidi unius producentia rursùs proportionalia ſupponantur tribus alterius producentibus, duo illa corpora ſunt inter ſe ut cubi producentium correſpondentium: v. g. altitudinum. Etenim ratio duorum corporum, quorum producentia ſunt proportionalia, eſt triplicata rationis producentium homologorum: v. g. altitudinum (200): porrò ratio, quæ eſt inter cubos altitudinum, eſt quoque triplicata rationis altitudinum (Alg. 116.): ergò ratio, quæ eſt inter duo corpora, quorum producentia ſunt proportionalia, æquat rationem cuborum producentium correſpondentium.

COROLLARIUM III.

202. Solida ſimilia ſunt in ratione triplicatâ trium unius producentium ad tria alterius producentia: ſunt quoque inter ſe ut producentium homologorum cubi. Quod quidem ex duobus Corollariis præcedentibus ſequitur; cum corpora ſimilia habeant producentia homologa proportionalia.

COROLLARIUM IV.

203. Sphæræ ſunt in ratione diametrorum triplicatâ, ſeu, ut diametrorum cubi. Etenim ad habendam ſphæræ ſoliditatem, multiplicanda ſuperficies per tertiam radii partem (190): Porrò ſphæræ ſuperficies æquat productum diametri per majoris circuli peripheriam (169): ergò tria ſphæræ producentia ſunt majoris circuli peripheria, diameter & triens radii: ſi igitur conferantur duæ ſphæræ, evidens eſt producentia unius, producentibus alterius eſſe proportionalia; proindè ſphæræ illæ ſunt inter ſe in ratione triplicatâ diametrorum, ſive, ut diametrorum cubi, quia rationi triplicatæ trium producentium ſubſtitui poteſt ratio triplicata unius producentis; cum hæ rationes ſimiles ſupponantur: unde ſi duarum ſphærarum diametri ſint ut 3 & 5, ſphæræ ſunt inter ſe ut horum numerorum cubi, hoc eſt, ut 27 ad 125.

SCHOLION I.

204. *Mira ſanè cuilibet videbitur hæc ſphærarum relatio: addimus & aliud exemplum circa ſolidorum*

relationem; non minori admiratione dignum : si conferatur pes cubicus cum pollice cubico, cùm primi corporis altitudo sit ad altitudinem secundi ut 12 ad 1, eorum soliditates erunt inter se ut cubus numeri 12, seu 1728 ad cubum unitatis, id est, 1. Igitur pes cubicus 1728 pollices cubicos continet.

SCHOLION II.

205. *Ex dictis judicare pronum est sphærarum superficies non eadem augeri proportione, quâ soliditates : etenim superficies non crescunt nisi ut quadrata diametrorum (175), soliditates autem crescunt ut earumdem diametrorum cubi (203) : sint v. g. duo globi, quorum unus diametrum habeat 10 pollicum, alter verò unius pollicis : erit dumtaxat primi superficies secundi superficie centies major, quia quadratum numeri 10 est 100 : verùm, cùm cubus numeri 10 sit 1000, primi globi soliditas soliditate secundi millies major erit. Undè si comparentur inter se corpora similia, minorem, proportione servatâ, superficiem habent majora quàm minora, ut evidens est attendenti ad corporum illorum soliditatem respectivam.*

THEOREMA XI.

206. *Sphæra se habet, ratione soliditatis, ad cylindrum circumscriptum, ut 2 ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Diameter, seu altitudo cylindri circumscripti, circumferentia magni circuli, & media pars radii, sunt tria soliditatis cylindri producentia (192): pariter diameter sphæræ, circumferentia magni circuli & tertia pars radii, sunt tria soliditatis sphæræ producentia 169& 190): quoniam igitur duo ex tribus soliditatem cylindri producentibus æqualia sunt duobus ex tribus soliditatem sphæræ producentibus, nempè diameter & circumferentia magni circuli; consequens est cylindrum & sphæram esse inter se ut tertia producentia, seu ut mediam partem radii & tertiam partem radii, sive (terminos illos duplicando) ut duas medietates & duas tertias partes, hoc est, sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3; sive sphæra duas partes tertias cylindri circumscripti complectitur.

COROLLARIUM.

207. Quoniam conus ejusdem basis & altitudinis ac cylindrus est tertia pars hujus cylindri (186): & quoniam (ex theoremate) sphæra ejusdem basis & altitudinis ac cylindrus complectitur duas 3as partes cylindri, consequens est sphæram esse duplam coni, & duobus æquivalere conis.

PROBLEMA III.

208. *Invenire, quantum fieri potest, soliditatem sphæræ, cujus diameter nota.*

RESOLUTIO.

1°. Sphæræ superficiem quære (176): 2° hanc superficiem multiplica per radii trientem; productum dabit soliditatem quæsitam (190).

PROBLEMA IV.

209. *Invenire soliditatem corporis, v. g. parallelopipedi cujus longitudo sit 16 exapedarum 4 pedum, 8 pollicum : latitudo 2 exap. 3 ped.; altitudo verò 7 exap. 2 ped.?*

OBSERVATIO.

210. Quando omnes solidi dimensiones sunt homogeneæ tum facilè æstimatur soliditas multiplicando primùm longitudinem per latitudinem ad habendam basim, dein ducendo basim inventam in altitudinem. Ast sæpiùs contingit has dimensiones esse heterogeneas, quo in casu adhiberi potest reductio ad minores species, quâ peractâ tres dimensiones ad eandem speciem infimam reductæ per invicem multiplicantur & dein dividitur productum per cubum numeri exprimentis quoties species major minorem contineat, exprimitque quotus soliditatem quæsitam.

Sic, in præsenti problemate, reductis omnibus dimensionibus ad pollicem qui in pede duodecies, & in exapedâ bis suprà septuagies continetur, invenietur longitudo = 1208 poll; latitudo = 180 poll; & altitudo 528. Dein tres illi numeri per invicem sunt multiplicandi, productum = 114808320 poll. cub: dabit quæsitam prædicti corporis soliditatem. Si postmodum nosse cupias quot exapedas cubicas contineat numerus ille pollicum cubicorum; eundem numerum divide per 373248, qui ultimus numerus, cum sit cubus numeri 72, indicat quot pollices cubicos contineat exapeda cubica; reperies autem in quoto 307, & residuum 221184, quod dividendum erit per 1728, idest per cubum numeri 12, ut habeatur numerus pedum cubicorum in prædicto residuo contentorum; quotus secundæ

hujus divisionis erit 128 citra residuum ; proindè 114808320 pollices cubici æquivalent 307 exapedis cubicis & 128 pedibus cubicis.

Verùm cum hæc methodus tædiosa nimis & molesta sit, aliam hìc tradimus, cujus fundamentum est sequens modus dividendi exapedam cubicam.

1°. Exapedæ cubicæ BF (fig. 77.) altitudinem AB divido in 6 partes æquales, & per puncta divisionis duco plana basi parallela, quibus exapeda cubica dividitur in 6 parallelopipeda æqualia, quæ vocantur *pedes exapedæ cubicæ*, quia eorum altitudo est pedis unius, basis verò unius exapedæ quadratæ; quapropter hujusmodi pes 36 pedes cubicos complectitur seu 6^{am} partem 216 pedum cubicorum, quos continet exapeda cubica.

2°. Pariter altitudinem *mr* cujuslibet pedis cubici in 12 partes æquales divido, & ductis, per puncta divisionis, planis basi parallelis, exurgunt 12 parallelopipeda æqualia, dicta *pollices exapedæ cubicæ*, eò quòd eorum altitudo pollici, basis verò exapedæ quadratæ æquetur.

3°. Eadem ratione divido pollicem in 12 partes æquales, quæ dicuntur *lineæ exapedæ cubicæ* ob rationem mox allatam. Hinc exapeda cubica continet 6 pedes, sive 72 pollices, sive demùm 864 lineas exapedæ cubicæ. His observatis.

RESOLUTIO PROBLEMATIS.

1°. Juxta methodum traditam (144) quæro superficiem baseos, sive productum longitudinis per latitudinem; quapropter primùm multiplico 16 exapedas multiplicandi per 2 exap. multiplicatoris, productum = 32 exap.; dein easdem 16 exap. multiplico per 3 pedes multiplicatoris, seu mediam exapedæ partem, productum = 8 exap.; posmodùm operor suprà reliquas multiplicandi notas, ac primùm quoniam 4 pedes sunt $\frac{2}{3}$ unius exapedæ, illorum productum æquat $\frac{2}{3}$ multiplicatoris, nempè 10 ped. exapedæ cubicæ; denique quià 8 pollices sunt 6^a pars 4 pedum, eorum productum erit 6^a pars prioris, nempe 1 pes 8 poll; quibus simul additis prodit quæsita basis, sc. 41 exap. quadratæ, 5 ped. & 8 poll. exapedæ quadratæ.

Longit.	16 Exap.	4 Ped.	8 Poll.
Latit.	2	3	
	32		
	8		
		10	
		1	8
Basis	41	5	8

2°. Hanc basim multiplico per altitudinem, seu 7 exapedas 2 ped.; ducendo primùm exapedas in exapedas, quarum productum = 287 exap. cub.; dein quia 2 ped. multiplicatoris sunt 3^a pars unius exapedæ, sumo tertiam partem exapedarum multiplicandi, nempè 13 exap. 4 pedes. Postmodum procedo ad pedes & pollices multiplicandi : quoniam autem 5 pedes continent mediam & tertiam partem unius exapedæ, sumo seorsim mediam & tertiam partem totius multiplicatoris sc. 3 exap. 4 ped; necnon 2 exap. 2 ped. 8 poll.: demùm quià 8 pollices sunt tertia pars 2 pedum, sumo tertiam partem producti 2 pedum, seu producti posterioris, adsuntque 4 ped. 10 poll. & 8 lineæ exapedæ cubicæ; his productis simul additis prodit soliditas quæsita complectens 307 exap. cub. 3 ped. 6 poll. & 8 lineas exapedæ cubicæ.

Basis	41 Exap.	5 Ped.	8 Poll.	
Altitudo	7	2		
	287			
	13	4		
	3	4		
	2	2	8	
		4	10	8 lin.
	307	3	6	8
	exapedæ cubicæ	ped. exap. cubicæ	poll. exap. cubicæ	lin. exap. cubicæ

PROBEMA ULTIMUM.

211. *Mensurare soliditatem corporum exiguorum atque ita irregularium ut nec in pyramides, nec prismata reduci possint : soliditatem*, v. g. *mensurare silicis cornibus irregularibus asperæ, ectyporum metallicorum &c.*

RESOLUTIO.

Res ita mechanicè absolvenda est : apponendum 1° corpus irregulare in vase aliquo cavo, cujus figura facilè mensurari possit, quale est vas cylindricum, aut prismaticum rectangulum : 2°. vas illud aquâ replendum aut alio fluido, quod nequeat corpus penetrare : 3°. è vase extracto solido, diligenter juxta principia superiùs tradita mensurandum volumen partis vasis, quæ vacua occurret; volumen illud propemodùm æquabit volumen corporis immersi, de quo agitur.

TRIGONOMETRIÆ COMPENDIUM.

QUAM jucunda, quam utilis, quam Physico necessaria sit hæc Mathesum pars, à peritis Physicæ & Astronomiæ Magistris discite: ore profitentur unanimi, quod, sublatâ Trigonometriâ, maxima eorum pars pereat, quæ in Physicâ & Mathesi admiramur. Certè astrorum magnitudinem, motum, distantiam, innumeraque alia similia prorsus ignoraremus, si Trigonometriæ destitueremur auxilio. Plurima sunt in Physicâ, phænomena quorum ratio frustrà, sine illius ope, indagaretur. Ars hæc mirum in modum Geometriæ usum & limites extendit, plurimorum problematum utilitate & jucunditate maximè commendandorum luminosam solutionem ministrat. Prolixior forem si præclaras omnes hujus scientiæ dotes, si quæcumque illius commoda ex ordine in medium proferre aggrederer. Cæterum sufficient mox dicta, ut animi veritatum amœnarum cupidi hujus scientiæ desiderio & amore ardeant & inflammentur.

Trigonometria alia sphærica quæ de triangulorum curvilineorum & mixtilineorum resolutione differit: alia plana quæ triangula rectilinea resolvit. Posterior, de quâ solâ hîc agimus, definiri solet, scientia quâ, cognitis quibusdam trianguli rectilinei partibus, reliquæ, calculi ope, reteguntur; v. g. notis lateribus duobus & angulo intercepto, inveniuntur anguli reliqui & latus ignotum. Hæc autem, sinuum tangentium & secantium ope, in lucem prodeunt; quare hoc compendium à sinuum theoriâ ordiemur.

CAPUT PRIMUM.

DE SINUUM TANGENTIUM ET SECANTIUM THEORIA.

OBSERVATIO.

1. SI, in triangulo quocumque, daretur relatio Geometrica inter angulum quemlibet & latus ipsi oppositum; perspicuum est quod cognitis duobus angulis & latere alterutri opposito, latus aliud, mediante simplici proportione, brevi innotesceret: pariter, cognitis duobus lateribus & angulo alterutri opposito, secundus angulus citò cognosceretur. Immò, in hoc utroque casu, omnes facilè trianguli partes detegerentur; nam, cognitis duobus angulis, tertius, utpotè supplementum 180 graduum, statim innotescit; citòque, mediante proportione, latus ei oppositum notum fieret. Verùm non datur, angulos inter & latera ipsis opposita, Geometrica relatio; datur tamen inter angulorum sinus & latera angulis opposita: undè, angulorum loco eorum sinus substitui possunt. Quapropter si omnium angulorum sinus innotuerint, tunc cognitis, in triangulo quolibet, partibus tribus, inter quas occurrat latus unum, cæteræ facilè detegentur; quare exponenda 1° sinuum natura; dein inquirendum quâ arte angulorum quorumlibet sinus cognosci queant.

DEFINITIO I.

2. Sinus rectus anguli GCA (fig. 1.) vel arcûs GA prædictum angulum mensurantis, est linea GH perpendiculariter ducta ab alterutrâ extremitate arcûs super diametrum ex aliâ extremitate ductam.

DEFINITIO II.

3. Sinus versus ejusdem anguli vel arcûs, est linea AH, seu pars radii inter sinum rectum GH & circumferentiam intercepta.

DEFINITIO III.

4. Cosinus anguli ejusdem est linea GL, seu sinus rectus anguli GCD qui prioris complementum est. Hinc sæpiùs vocatur sinus complementi. Cum HC semper æquet GL, sunt enim duæ perpendiculares inter parallelas comprehensæ, ideò HC, seu pars radii inter centrum & sinum rectum intercepta, cosinus non raro appellatur.

DEFINITIO IV.

5. Sinus totus, seu sinus quadrantis circuli,

aut anguli recti, est recta CA vel CD, seu radius circuli in cujus centro situs est anguli vertex.

DEFINITIO V.

6. Tangens anguli ACE seu arcûs AE (fig. 2.) est pars HE rectæ tangentis circulum, in unâ arcûs extremitate E, intercepta inter rectas CH & CE, ex centro, per utrumque arcûs extremum, ductas.

DEFINITIO VI.

7. Secans ejusdem anguli, vel arcûs, est recta CH, ex centro C, per aliud arcûs extremum ducta, & ad tangentem usque extra circulum producta.

COROLLARIUM I.

8. Ex dictis sequitur sinum anguli obtusi non distingui à sinu sui complementi; siquidem, in angulo obtuso, unica in diametrum duci possit perpendicularis, quæ (ex Definitione 1.) sinus est anguli complementi.

COROLLARIUM II.

9. Sinus versus anguli acuti est differentia inter radium & cosinum; nam AH (fig. 1.) = AC − HC; sed HC = GL; ergo AH = AC − GL.

COROLLARIUM III.

10. Sinus rectus anguli vel arcûs cujuslibet est media pars chordæ arcum duplum subtendentis: nam sinus quilibet, v. g. GH (fig. 1.) est media pars GK; siquidem hæc chorda, quemadmodum & arcus GAK quem subtendit, in duas partes æquales secetur per radium CA, chordæ GK, ex hypotesi, perpendicularem (Geom. 15).

Hinc 1°, si chordæ omnium circumferentiæ arcuum innotescerent, citò omnium arcuum, adeoque & omnium angulorum, sinus cognoscerentur.

Hinc 2°, sinus cujuslibet anguli inscripti A (fig. 3.) media pars est lateris huic angulo oppositi; quod facilè intelligitur, si idem angulus A sic in circuli centro collocetur, ut latus AB adhuc transeat per punctum B; latus verò AC arcum BDC in duas partes æquales dividat.

COROLLARIUM IV.

11. Ex dictis intelligitur sinum anguli recto minoris eò majorem esse, quò plus augetur angulus; minorem verò, quo plus imminuitur: è contra verò sinum anguli recto majoris eò fieri minorem quo plus augetur angulus; majorem autem, quo plus imminuitur. Radium verò, seu semidiametrum, esse sinuum omnium maximum.

SCHOLION.

12. *Cum sinus totus circuli cujuslibet æquet radium, sinus verò partiales æquent radii partes; si radius, seu sinus totus in* 100000, *vel* 10000000 *partes dividatur; tunc sinus partiales erunt istius summæ portiones, majores vel minores, pro sinuum ratione.*

THEOREMA I.

13. *In duobus circulis inæqualibus, chordæ arcuum similium radiis sunt proporionales.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo circuli CB & DE (fig. 62 Geom.) in quibus sumantur duo anguli æquales DAE & BAC, quorum latera arcus similes intercipiant, ducanturque lineæ DE & BC prædictos arcus subtendentes; aderunt triangula DAE & BAC similia; siquidem ambo sint isoscelia & angulum verticalem habeant communem; igitur trianguli minoris latera, lateribus majoris proportionalia sunt; adeoque BC. AC :: DE. AE. Quod E. D.

COROLLARIUM I.

14. Ergò, in circulis inæqualibus, sinus arcuum similium sunt radiis, seu sinibus totis proportionales: nam sinus sunt mediæ partes chordarum arcus duplos subtendentium; cum autem chordæ illæ radiis proportionales sint, earum mediæ partes, quæ sinus sunt, radiis etiam, seu sinibus totis proportionales sunt.

LEMMA.

15. *Si quælibet quantitas per aliam multiplicanda sit, idem exurget productum, sive* 1ª *statim per* 2ᵃᵐ *integram; sive successivè per diversas* 2æ *quantitatis portiones multiplicetur.*

DEMONSTRATIO.

Si multiplicetur 12 per 10, productum erit 120: si eadem quantitas 12 successivè multiplicetur per 8+2, & per 6+4, quæ partes sunt primi multiplicatoris 10, productum erit pariter 120; in iis enim casibus numerus multiplicandus totidem vicibus assumitur; adeoque idem exurgere

debet productum. Idem facilè de lineis in se invicem ductis demonstrari potest.

THEOREMA FUNDAMENTALE.

16. *In quolibet quadrilatero inscripto* ABDF (fig. 4.) *summa rectangulorum laterum oppositorum æquat rectangulum diagonalium; idest*, $AB \times DF + AF \times BD = AD \times BF$.

DEMONSTRATIO.

È vertice anguli A, sic ducatur linea AM, ut angulus r æquet angulum s; hoc posito, evidens est 1° quod $BD \times AF = AD \times FM$: nam triangula FAM & ADB sunt similia, siquidem omnes anguli correspondentes utrimque æquales sint; angulus enim $r = s$, per constructionem; anguli autem AFM & ADB, verticem in peripheriâ habentes, & eidem arcui AB insistentes, æquales etiam sunt; quare BD. AD : : FM. AF; adeòque $BD \times AF = AD \times FM$.

2°. Pariter evidens est quod $AB \times FD = AD \times MB$; quippè similia etiam sunt triangula AFD & AMB; enim verò angulus FAD = MAB, ob angulum communem MAV additum duobus angulis æqualibus r & s: insuper angulus FDA = MBA, cum uterque eidem arcui insistat; prodit ergo hæc proportio : FD. MB : : AD. AB; proindè $FD \times AB = MB \times AD$.

Igitur summa rectangulorum laterum oppositorum æquat productum diagonalis AD, per partes FM & MB diagonalis FB, seu per totam diagonalem FB (15). Q. E. D.

SCHOLION.

17. *Ex hujus theorematis theoriâ prodiêrunt famosæ sinuum tabulæ, quæ basis sunt & fundamentum præcipui calculi Mathematici & Physico-Mathematici. Ut autem intelligatur quâ ratione construi potuerint, & à quolibet construi possent, si non existerent; observandum quod, supposito radio in* 100000 *partes æquales v. g. diviso, jam cognoscitur radius, necnon illius quadratum; pariter innotescunt chorda subtendens arcum* 60 *graduum, quæ radio semper æqualis est, & diameter, quæ est radii dupla. His mediantibus inveniri possunt in circulo chordæ singulorum arcuum ab uno minuto ad gradus* 90, *harum autem chordarum partes mediæ sinus exhibent angulorum quorumlibet, ab uno semi-minuto ad gradus* 45. *Deinde horum sinuum ope cognoscuntur sinus reliquorum arcuum, seu angulorum, usque ad gradus* 90. *Quod ut pateat sit.*

PROBLEMA I.

18. *Cognitâ chordâ arcûs cujuslibet, invenire chordam arcûs qui prioris supplementum sit?*

RESOLUTIO.

Sit chorda cognita AB (fig. 4.) cujus ope detegi debeat chorda AF: quoniam hæ chordæ simul subtendunt arcum 180(°), diametro innituntur, angulumque rectum efformant in A, adeò ut diameter tamquam hypothenusa haberi queat: undè cum quadratum hypothenusæ æquet quadrata reliquorum laterum (138 Geom.), si elevetur diameter ad suum quadratum, & ab eo auferatur quadratum chordæ cognitæ, reliquum dabit chordæ quæsitæ quadratum, è quo si extrahatur radix, prodibit chorda quæsita AF.

PROBLEMA II.

19. *Cognitis chordis duorum arcuum* AB & AD (fig. 5.) *invenire chordam* BD *arcum utrumque subtendentem?*

RESOLUTIO.

È puncto conjunctionis chordarum A duc diametrum AC, dein, per Problema 1um, inquire chordas supplementorum BC & DC: tùm si BC multiplices per AD, & AB per DC, summa productorum æquabit rectangulum diagonalium AC & BD (16); quare si summa hæc dividatur per diametrum AC, prodibit chorda quæsita BD.

COROLLARIUM.

20. Si chorda AB fuisset chordæ AD æqualis, ut in fig. 6, tunc, per mox relatam methodum, inventa fuisset chorda arcûs BD, qui arcûs AB duplus est; quare

1°. Cognitâ chordâ arcûs cujuslibet, facilè, per Problema secundum, detegitur chorda arcus dupli.

2°. Cognitâ chordâ arcûs cujuscumque, facilè etiam invenitur chorda arcûs tripli, quærendo primùm chordam arcûs dupli, & deindè chordam summæ arcûs simplicis & arcûs dupli.

3°. Demùm facilè intelligitur posse eâdem methodo cognosci chordas tum arcûs quadrupli, tum quintupli &c, quærendo 1° ut modò, chordam arcûs tripli aut quadrupli, deindè chordam summæ ejusdem arcûs & arcûs simplicis.

PROBLEMA III.

21. *Cognitâ chordâ arcûs cujuſlibet* BD (fig. 6) *invenire chordam arcûs dimidii* BA ?

RESOLUTIO.

Ducto radio BF, ab illius quadrato ſubtrahe quadratum mediæ chordæ cognitæ BE, reſiduum erit quadratum partis EF, cujus radix dabit lineam EF (Geom. 138); adeòque innoteſcet linea AE, quæ radii reſiduum eſt : jam verò quoniam in triangulo rectangulo AEB, innoteſcunt duo latera BE & AE, quorum quadrata æqualia ſunt quadrato hypothenuſæ, ſeu lateris AB (138 Geom.) ſi è ſummâ horum quadratorum extrahatur radix, prodibit latus AB, ſeu chorda quæſita arcûs dimidii BA.

PROBLEMA IV.

22. *Cognitâ chordâ arcûs cujuſlibet, invenire chordam arcûs ſubtripli ?*

22. Etſi deſit methodus certa, quâ ſtatim & directè detegatur hujuſmodi chorda; cujuſdam tamen probationis ope, certò innoteſcere poteſt, an chorda aſſumpta ſit reverà chorda quæſita, an non : cum autem chorda aſſumpta poſſit, pro libitu, augeri vel minui, poterit reddi chordæ quæſitæ æqualis : ſic itaque procedendum.

RESOLUTIO.

Quoniam certum eſt tres chordas, arcus ſubtriplos ſubtendentes, ſimul ſumptas, eſſe majores chordâ arcuum ſummam ſubtendente, evidens eſt chordam arcûs ſubtripli eſſe pluſquam tertiam partem chordæ arcum totalem ſubtendentis; quare ſumatur tertia pars chordæ arcûs totalis & quid amplius; v. g. ſi chorda arcum totalem ſubtendens ſit 600 partium, ſumantur 204 partes, dein, hâc chordâ ſuppoſitâ, quæratur, per methodum expoſitam in Corrol. Probl. ſecundi (20), chorda arcus tripli : ſi chorda, hâc methodo retecta, complectatur 600 partes, ſignum eſt, & certum quidem, chordam quæſitam eſſe, reipsâ 204 partium : verùm ſi chorda retecta plures vel pauciores partes complectatur, tunc augendus vel minuendus numerus partium chordæ ſuppoſitæ, & iteranda probatio, donec per chordam ſuppoſitam reperias chordam arcûs tripli, chordæ cognitæ æqualem.

Eâdem methodo cognoſci poteſt chorda arcûs ſubquintupli; ſupponendo nimirum hanc chordam eſſe paulò majorem quintâ parte chordæ cognitæ, & inquirendo, ope chordæ ſuppoſitæ, chordam arcûs quintupli.

SCHOLION.

23. *Cuilibet attendenti palam fiet, præcedentium problematum ope, inveniri poſſe chordas arcuum omnium ab arcu 2(′), ad arcum 90(°) : nam 1°, cum chorda, arcum 60(°) ſubtendens, æquet radium, eâ mediante, per Problema 3um, retegi poteſt chorda arcûs 30(°), deindè 15(°), demum 7(°) cum 30(′). 2°, Retectâ chordâ 7(°) & 30(′), inquiretur, per Problema 4um, chorda arcûs ſubtripli, ſeu 2(°) & 30(′); deindè chorda arcûs ſubquintupli, ſeu 30(′), cujus ope facilè retegetur chorda arcûs ſubtripli, ſeu 10(′); demum hâc ultimâ mediante reperietur chorda arcûs ſubquintupli, ſeu 2(′). 3°, Retectâ chorda arcûs 2(′), facilè, per præcedentia Problemata, invenientur chordæ arcuum 4(′), 6(′), 8(′), 10(′) & ſic deinceps uſque ad arcum 90(°) : cum autem harum chordarum partes mediæ ſint ſinus arcuum ſubduplorum, hâc viâ innoteſcent ſinus omnium arcuum, ad arcu 1(′), ad arcum 45(°). Quomodò autem, retectis his ſinibus, reliqui uſque ad ſinum arcûs 90(°), ſeu ſinum totum, inveniri queant, indicabit Problema ſequens.*

PROBLEMA V.

24. *Cognito ſinu* FA *arcûs cujuſcumque* (fig. 2.) *invenire coſinum, ſeu ſinum complementi* AB ?

RESOLUTIO.

Quoniam in triangulo rectangulo CBA, innoteſcunt latus CA radio æquale, & latus CB æquale ſinui cognito FA, cognoſcetur latus tertium, ſeu coſinus quæſitus AB, ſi dempto quadrato lateris cogniti, CB ex quadrato radii CA, extrahatur radix quadrata reſidui, ſeu exceſsûs lateris CA ſupra CB.

SCHOLION.

25. *Hâc viâ cognoſci queunt, & reverâ innotuerunt ſinus omnium arcuum, ab arcu unius minuti, ad arcum 90 graduum. Quibus cognitis, editæ ſunt celebres ſinuum tabulæ, quarum utilitas in Matheſi nuſquam ſat commendanda.*

PROBLEMA VI.

26. *Cognitis arcuum quorumlibet ſinibus & coſinibus, invenire tangentes ?*

RESOLUTIO.

Sit arcus AE (fig. 2.) cujus cognoſcuntur ſinus AB & coſinus CB : quoniam tangens HE perpendicularis eſt radio CE, utpotè ſinui AB

parallela ; triangula HCE & ACB similia sunt, hancque subministrant proportionem CB. PA :: CE. EH, cujus noti sunt tres priores termini, scilicet cosinus CB, sinus BA, & sinus totus seu radius CE; facilè itaque invenietur quartus, qui est tangens quæsita EH.

PROBLEMA VII.

27. *Cognitâ tangente arcûs cujuslibet, invenire co-tangentem, seu tangentem complementi?*

RESOLUTIO.

Prodit co-tangens quæsita, si quadratum radii per tangentem ejusdem arcûs dividatur: ratio est quod istud quadratum æquet productum, cujus factores sunt tangens arcûs, & co-tangens; nam triangula rectangula CEH & CIA (Fig. 7) similia sunt, ob angulorum correspondentium æqualitatem; consequenter EH. CE :: CI vel CE. IA; proindè $CE^2 = EH \times IA$, & $IA = \frac{CE^2}{EH}$.

PROBLEMA VIII.

28. *Cognitis arcuum quorumlibet tangentibus, determinare secantes?* (Fig. 2).

RESOLUTIO.

Quoniam trianglum HCE (idem dicendum de aliis) rectangulum est in E, secans CH est hypothenusa; quare si quadrato radii CE addatur quadratum tangentis HE, prodibit quadratum hypothenusæ, cujus radix secantem quæsitam indicabit.

SCHOLION.

29. *Ex dictis patet facilè detegi posse omnium arcuum tangentes & secantes, atque ex iis tabulas efformari. Quod & factum est. Iniquirendum nunc quomodo, ope tabularum sinuum tangentium & secantium, triangula quælibet resolvi queant. Sed priùs breviter exponenda Trigonometriæ theoria.*

CAPUT II.

DE TRIGONOMETRIÆ THEORIA.

THEOREMA I.

30. *IN triangulo quolibet, sinus angulorum proportionales sunt lateribus quæ his angulis opponuntur.*

DEMONSTRATIO.

Partes mediæ totis proportionales sunt: atqui sinus angulorum sunt partes mediæ laterum his angulis oppositorum; si enim circulo inscribatur triangulum quodcumque ABC (fig. 3.) hujus trianguli latera fiunt totidem chordæ, quarum partes mediæ sinus sunt angulorum sibi oppositorum (10.) igitur sinus anguli A est pars media chordæ BC; sinus anguli C pars media chordæ AB, sinus anguli B pars media chordæ AC; proindè sinus anguli cujuslibet proportionalis est lateri opposito. Q. E. D.

THEOREMA II.

31. *In omni triangulo scaleno* ACB (fig. 8.) *si è vertice anguli majoris demittatur perpendicularis in latus oppositum; latus maximum* AC *erit ad summam aliorum* BC *&* BA, *ut differentia horum laterum* HA, *ad differentiam* DA *segmentorum* EA *&* CE.

È vertice anguli majoris B, tamquam centro, describatur circulus cujus radius æqualis sit lateri minimo CB; dein producatur latus AB usque ad G, ut habeatur linea AG utrique lateri BC & BA æqualis, & eorum differentia AH: Demùm demittatur perpendicularis BE in latus AC, ut habeantur segmenta CE & EA, necnon eorum differentia DA. His positis.

DEMONSTRATIO THEOREMATIS.

Partes exteriores AH & AD duarum secantium AG & AC, sunt secantibus integris reciprocè proportionales (Geom. 69); quare habetur sequens proportio, AC. AG :: AH. AD; cujus proportionis noti sunt tres termini priores, sc. AC, quod est maximum trianguli latus; AG, repræsentans summam aliorum laterum, & AH, eorumdem differentiam exhibens; facilè itaque innotescet quæsita segmentorum differentia DA.

LEMMA.

32. 1°. *Si in triangulo scaleno* BAC (fig. 9) *producatur latus maximum* BA, *donec* AD *æquet latus minimum* AC, *& ductâ lineâ* DC *habeatur triangulum isosceles* DAC; *dein è vertice* A *novi trianguli demittatur in latus* DC, *perpendicularis* AF, *erit* FD *tangens semi-summæ angulorum* B *&* C *lateribus* AC *&* AB *oppositorum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus exterior DAC, ex productione lateris AB ortus, æquat angulos oppositos B & C (53); cum autem in duas partes æquales secetur per perpendicularem AF, erit angulus FAD æqualis

semi-summæ angulorum prædictorum B & C: sed FD est tangens hujus anguli FAD, ut perspicuum fit, ductâ, per radium AF, peripheriâ FG; igitur FD est tangens semi-summæ angulorum B & C; Quod E. D.

2°. *Si è vertice anguli A ducatur linea AE basi BC parallela, erit EF tangens semi-differentiæ eorumdem angulorum B & C.*

DEMONSTRATIO.

Angulus DAF (ex Dem. superiori) æqualis est semi-summæ angulorum B & C: sed angulus DAE æqualis est angulo minori B, ob parallelismum rectarum BC & AE; igitur angulus EAF æquat semi-differentiam prædictorum angulorum B & C, utpotè æqualis excessui semi-summæ angulorum B & C supra angulum minorem B (æqua: 14): sed EF est tangens ejusdem anguli EAF, cum radio AF sit perpendicularis (per constructionem); ergò EF est tangens semi-differentiæ angulorum B & C. Quod E.D.

THEOREMA III.

33. *In quolibet triangulo scaleno, ut* BAC, (fig. 9.) *summa duorum laterum, v. g.* BA+AC *est ad eorum differentiam; sicut tangens semi-summæ angulorum* B & C, *prædictis lateribus oppositorum, est ad tangentem semi-differentiæ eorumdem angulorum.*

Lineis, ut in lemmate præcedenti, dispositis, è puncto F ducatur linea HF basi BC parellela, quibus positis, CD = AB+AC; linea verò AH æqualis est semi-differentiæ prædictorum laterum AB & AC seu AD; enim verò quoniam HF basi BC parallela est, proportionaliter secat latera BD & CD trianguli BDC: sed, per constructionem, secat latus CD, in duas partes æquales; ergò & latus BD: quare AH est differenria inter latus minimum AD & dimidiam summam laterum BA +AD, sc. DH; proindè AH est eorumdem laterum semi-differentia, & 2AH differentia totalis (æqua: 14): his positis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam, in triangulo HDF, duæ sunt bases parallelæ AE & HF (per constructionem), habetur hæc proportio, DH. AH:: DF. EF. (62) adeòque & sequens 2DH. 2AH:: DF. EF: (Alg. 58.) sed 2DH = BD, seu summam laterum BA & AC, & 2AH = AB − AC, seu eorumdem differentiam; ergò summa laterum AB & BC, est ad eorum differentiam; ut DF tangens dimidiæ summæ angulorum B & C prædictis lateribus oppositorum, ad EF tangentem semi-differentiæ eorumdem angulorum. Q. E. D.

CAPUT III.

DE RESOLUTIONE TRIANGULORUM.

OBSERVATIO.

34. Quatuor sunt casus seorsim in diversis problematibus exponendi: sc. vel, in triangulo proposito, duo cognoscuntur latera & angulus alterutri oppositus, vel innotescunt duo anguli & latus interceptum; vel tria nota sunt latera; vel demùm cognoscuntur duo latera & angulus interceptus. Quilibet casus peculiarem habet solutionem seorsim exponendam; sed anteà observa resolvi non posse triangulum, cujus præcisè innotescunt tres anguli; quia possunt duo triangula habere angulos æquales & latera inæqualia; uti sunt triangula similia.

PROBLEMA I.

35. *Resolvere triangulum quodcumque* ABC (fig. 10.) *cujus innotescunt duo latera* AB & BC & *angulus* A *uni lateri cognito oppositus.*

RESOLUTIO.

Quoniam sinus angulorum lateribus oppositis proportionales sunt (30) sequens instituatur proportio: latus BC est ad sinum anguli noti & oppositi A; sicut latus AB est ad sinum anguli oppositi C ignoti: sive hoc modo: BC. S-A:: BA. S-C: in quâ proportione innotescunt tres priores termini, undè facilè innotescet quartus, seu sinus anguli C, &, eo mediante, ipse angulus C; eo autem noto, cognoscetur angulus tertius B, qui priorum supplementum est: Demùm inquiretur latus ignotum AC, mediante sequenti proportione, S-A. BC:: S-B. AC. Quo cognito, totum innotescet triangulum.

SCHOLION.

36. *Observa quod si angulus primùm cognitus sit acutus, tunc necesse sit, ad certam problematis resolutionem, ut generatim cognoscatur an secundus angulus quæsitus obtusus sit vel acutus; in hoc enim casu duo efformari possunt triangula diversa, tres conditiones in problemate enunciatas complectentia.*

PROBLEMA II.

37. *Resolvere triangulum quodcumque* ABC (fig. 11.) *cujus innotescunt duo anguli* B & C, *cum latere intercepto* BC.

RESOLUTIO.

Quoniam innotescunt duo anguli B & C, innotescit etiam tertius A, qui priorum supplementum est; quare si instituatur sequens proportio, S-A. BC :: S-B. AC, in quâ noti sunt tres primi termini, quartus, nempè latus AC, statim invenietur: deindè, mediante sequente proportione simili, S-A. BC :: S-C. AB, reperietur latus AB; adeòque notæ fient omnes trianguli propositi partes.

PROBLEMA III.

38. *Resolvere triangulum quodcumque scalenum* CBA (fig. 8.) *cujus præcisè nota sunt tria latera.*

RESOLUTIO.

1°. Ex anguli majoris vertice B, demittatur in latus oppositum CA linea perpendicularis BE, triangulum propositum in duo triangula rectangula dividens.

2°. Instituatur sequens proportio: latus maximum AC, est ad summam aliorum laterum CB + AB = AG; sicut eorum differentia HA est ad differentiam DA segmentorum CE & EA; sive AC. AG :: HA. DA. (31) cujus proportionis innotescunt tres priores termini per conditiones problematis, adeòque facilè retegetur quartus, seu segmentorum differentia DA.

3°. Quoniam notum est latus maximum CA, nota etiam est pars illius media, cui si addatur media pars differentiæ mox retectæ DA, prodibit majus segmentum EA; ideòque, in triangulo BEA, innotescent angulus E rectus, & duo latera EA & BA; quare citò retegetur angulus B, mediante sequenti proportione, BA. S-E :: EA. S-B, quo cognito, cognoscetur tertius angulus A.

4°. Quoniam, his peractis, cognoscuntur, in triangulo proposito CBA, tria latera & angulus A lateri BC oppositus; facilè invenientur anguli reliqui, per sequentes proportiones, CB. S-A :: BA. S-C & CB. S-A :: AC. S-B.

PROBLEMA IV.

39. *Resolvere triangulum quodcumque scalenum* ABC (fig. 9.) *in quo cognoscuntur duo latera* AB *&* AC, *& angulus interceptus* A.

RESOLUTIO.

Quæratur 1° tangens semi-differentiæ angulorum ignotorum, mediante sequenti proportione, summa laterum cognitorum AB + AC, est ad eorum differentiam; sicut tangens mediæ summæ angulorum B & C prædictis lateribus oppositorum, est ad tangentem semi-differentiæ eorumdem angulorum (33); inventâ hâc tangente, quæretur, ope tabularum, ipsa semi-differentia angulorum ignotorum, hæc autem, dimidiæ eorum summæ addita, angulum majorem dabit, si verò ab eâdem semi-summâ subtrahatur, prodibit angulus minor (æqua: 14): cognitis autem tribus angulis & lateribus AB & AC, facilè invenietur latus BC mediante sequenti proportione, S-B. AC :: S-A. BC.

CAPUT IV.

DE TRIGONOMETRIÆ APPLICATIONE.

PROBLEMA I.

40. *INvenire aream trianguli cujus cognoscuntur latera & anguli.*

RESOLUTIO.

Si triangulum rectangulum fuerit, sumantur latera angulo recto adjacentia tamquam basis & altitudo trianguli propositi, unumque per alterius dimidium multiplicetur, productum quæsitam aream dabit.

Si verò triangulum rectangulum non fuerit, è vertice anguli majoris mentaliter demittatur perpendicularis in latus oppositum, hæc triangulum datum dividet in duo triangula rectangula: tùm sequens instituatur proportio, sinus totus est ad latus ipsi oppositum, sicut sinus anguli, lineæ perpendiculari oppositi, est ad ipsam perpendicularem. Hæc autem trianguli propositi altitudinem dabit, quæ, ducta in dimidiam basim, aream quæsitam indicabit.

PROBLEMA II.

41. *Altitudinem* AB *objecti accessibilis, turris v. g. mensurare?* (fig. 12.)

Quoniam ad id opus est instrumento Goniometrico (vulgò *Graphometre*), observandum hoc instrumentum esse semicirculum, per gradus & minuta accuratè divisum, (Fig. 15) : illius centro affixa est regula circa centrum mobilis; in cujus extremitatibus E & D perpendiculariter erectæ sunt duæ pinnulæ: sunt autem pinnulæ, laminæ metallicæ, exiguâ lineâ perpendiculari perforatæ, ad radii visualis directionem: extant pariter hujusmodi pinnulæ perpendiculares & immobiles in utraque diametri extremitate A & B: hoc notato

RESOLUTIO.

1°. Electâ statione in D, per pinnulas diame-

trales collineando, instrumenti diametrum dirige versus punctum B; Deindè sic regulam mobilem move, ut oculo per pinnulas E & D collineanti occurrat vertex turris A; ita ut distantia inter diametrum & regulam mobilem indicet quantitatem anguli ADB.

2°. Mensuranda distantia stationis D, ad punctum B; quæ distantia basis est trianguli ADB, cujus angulus B rectus est, adeòque notus; igitur in hoc triangulo cognoscentur duo anguli D & B & latus interceptum DB, proindè etiam innotescit angulus tertius A; adeòque brevi innotescet latus AB, seu altitudo quæsita, mediante nimirum hâc proportione: S-A. DB:: S-D. AB.

PROBLEMA III.

42. *Altitudinem objecti inaccessibilis, v. g. turris* AB *mensurare?* (fig. 12.)

RESOLUTIO.

Eligantur duæ stationes C & D, lineam rectam cum puncto B constituentes, quarum distantia accuratè mensuretur; dein, ex statione C, mensuretur quantitas anguli ACD, &, ex statione D, quantitas anguli ADC; quo facto, in hoc triangulo, innotescent anguli omnes & latus CD; proindè, facilè cognoscetur latus AD, mediante sequenti proportione: S-A. CD:: S.C. AD. Cognito autem latere AD, citò cognoscetur altitudo quæsita AB; nam in triangulo ADB cognoscitur angulus ADB, qui est supplementum anguli noti ADC. Sed & cognoscitur angulus B rectus; adeòque & angulus A; quare hâc proportione, S-B. AD:: S-D. AB, retegetur altitudo desiderata AB.

PROBLEMA IV.

43. *Mensurare, in plano, distantiam ex unâ tantum parte accessibilem, v. g. latitudinem* AB *fluminis?* (fig. 10.)

RESOLUTIO.

Eligantur in ripâ accessibili duæ stationes, quarum distantia exactè mensuretur, & in ripâ oppositâ notetur objectum quoddam A ex utrâque statione visibile. Dein ex utrâque statione mensuretur quantitas angulorum B & C, quâ retectâ, cognoscetur etiam quantitas anguli A; undè facilè retegetur quantitas lateris AD, seu latitudo quæsita, mediante proportione sequenti, S-A. BC:: S-C. AB.

PROBLEMA V.

44. *Duorum objectorum inaccessorum* C *&* D *distantiam* CD *invenire?* (fig. 13.)

RESOLUTIO.

Eligantur duæ stationes A & B quarum mensuretur distantia. Ex puncto A, mensuretur quantitas angulorum CAB & DAB: Pariter ex puncto B, mensuretur quantitas angulorum ABD & ABC; quibus notis, innotescet etiam angulus CBD: his perfectis: quæratur quantitas laterum CB & DB, quæ facilè retegetur, quoniam in triangulis CBA & DAB cognoscuntur omnes anguli & latus commune AB; his autem retectis, cognoscentur in triangulo CBD duo latera CB & BD, & angulus interceptus B; undè, per theoriam problematis 4ⁱ (39), reperientur anguli C & D, & demùm latus CD, seu distantia quæsita.

PROBLEMA VI.

45. *Regionis cujusdam Iconographiam describere?* (fig. 14.)

RESOLUTIO.

In eadem lineâ eligantur duæ stationes M & N quarum distantia exactè mensuretur; dein ex statione M, mensurentur anguli AMN, BMN, CMN, DMN. Postmodum ex statione N, investigetur quantitas angulorum, MNA, MNB, MNC, MND. Radii visuales, ex utrâque statione, ad objecta proposita profecti, varia efformabunt triangula MAN, MBN &c, quorum nota erit basis MN, notique erunt anguli in utrâque basis extremitate efformati; undè si hæc triangula, per theoriam problematis secundi (37), resolvantur, innotescet objectorum propositorum situs. His peractis, poterit etiam, per theoriam problematis 4ⁱ (43), inveniri horum objectorum ab invicem distantia.

SCHOLION.

46. *Ut calculi Trigonometrici molestias fugaret Neperus Scotus, insignis Geometra, quæsivit & invenit methodum, cujus ope multiplicationes omnes, viâ simplicis additionis, divisiones, viâ substractionis, potentiarum verò exaltationes & extractiones, simplici multiplicatione & divisione resolverentur. Hæc porrò methodus à* Logarithmis *pendet: sunt autem* Logarithmi *numeri artificiales arithmeticè proportionales, qui aliis numeris geometricè proportionalibus respondent. Plures à variis Authoribus editæ sunt Logarithmorum Tabulæ, quibus præest theoria earumdem principia & usum exponens. Hæ Tabulæ summoperè utiles sunt Astronomis & Geometris, qui ad plura & longiora computa Trigonometrica adstringuntur: Ast Physicis & aliis quamplurimis abundè sufficit hîc adjunctus sinuum Index.*

FINIS.

INDEX SINUUM.

OBSERVATIO.

1°. IN præſenti indice occurrunt ſinus ſingulorum angulorum acutorum quinque minutis diſcretorum, ab angulo unius minuti ad angulum 90 graduum. Facillimum eſt autem, his mediantibus, ſinus intermedios detegere : v. g. ſi quæratur ſinus anguli 40(°) & 23(′); cum in Tabulâ occurrant ſinus anguli 40(°) & 20(′), necnon anguli 40(°) & 25(′); ſumenda eorum differentia & in quinque partes dividenda, deindè tot quintæ partes hujus differentiæ ſinui minori ſunt addendæ, quot angulus propoſitus habet minuta angulo minori ſuperaddita : nimirùm, in præſenti caſu, ſinui anguli 40(°) & 20(′), addendæ ſunt tres partes quintæ differentiæ inventæ ; quia angulus propoſitus tribus minutis excedit angulum minorem ; hæc autem ſumma ſinum quæſitum anguli 40(°) & 23(′) dabit.

2°. Quoniam ſinus angulorum obtuſorum, à ſinibus acutorum, qui eorum ſupplementa ſunt, non diſtinguuntur (8) ; ideò, quotieſcumque anguli obtuſi inveſtigatur ſinus, quærendus eſt ſinus anguli acuti qui illius eſt ſupplementum : v. g. ſi inveſtigetur ſinus anguli 112(°) & 15(′) ; primò hæc ſumma ex 180(°) auferenda eſt, reſiduum, nempè 67(°) & 45(′), erit anguli propoſiti ſupplementum ; quare ſi in Tabulis quæratur poſterioris hujus anguli ſinus, habebitur ſimul ſinus anguli propoſiti.

3°. In ſubjecto indice ſinus totalis diviſus eſt in 100000 partes ; numeri autem ſinus minores exprimentes eâ proportione decreſcunt, quâ minuuntur ſinus ; v. g. ubi ſinus eſt media vel tertia pars radii, exprimitur per numerum qui media eſt vel tertia pars numeri mox relati. Levi attentione datâ, palam fit differentiam inter ſinus in indice relatos eandem fermè eſſe inter ſinus parùm diſſitos ; eandemque eò fieri minorem, quò plus acceditur ad ſinum totum ; quare ſi quis, in numeris ſinum unum exprimentibus, contingeret error, is facilè emendari poſſet, eum conferendo cum ſinibus præcedentibus & ſequentibus.

4°. Quoniam ſinus cujuſlibet arcûs media pars eſt chordæ arcum duplum ſubtendentis (10), facile eſt, præſentis indicis ope, quorumlibet arcuum chordas invenire, quæratur nempè ſinus partis mediæ arcûs propoſiti, & retectus duplicetur, prodibit chorda quæſita. Sic retegitur chorda arcûs 21(°), duplicando ſinum arcus 10(°) & 30(′).

G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.
	1	,00029	1		,01745	2		3490	3		5234
	5	,00145	1	5	,01891	2	5	3635	3	5	5379
	10	,00291	1	10	,02036	2	10	3781	3	10	5524
	15	,00436	1	15	,02181	2	15	3926	3	15	5669
	20	,00582	1	20	,02327	2	20	4071	3	20	5814
	25	,00727	1	25	,02472	2	25	4217	3	25	5960
	30	,00873	1	30	2618	2	30	4362	3	30	6105
	35	,01018	1	35	2763	2	35	4507	3	35	6250
	40	,01164	1	40	2908	2	40	4653	3	40	6395
	45	,01309	1	45	3054	2	45	4798	3	45	6540
	50	,01454	1	50	3199	2	50	4943	3	50	6685
	55	,01600	1	55	3345	2	55	5088	3	55	6831

G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.	G.	M.	SINUS.
4		6976	7	30	13053	11		19081	14	30	25038
4	5	7121	7	35	13197	11	5	19224	14	35	25179
4	10	7266	7	40	13341	11	10	19366	14	40	25320
4	15	7411	7	45	13485	11	15	19509	14	45	25460
4	20	7556	7	50	13629	11	20	19652	14	50	25601
4	25	7701	7	55	13773	11	25	19794	14	55	25741
4	30	7846	8		13917	11	30	19937	15		25882
4	35	7991	8	5	14061	11	35	20079	15	5	26022
4	40	8136	8	10	14205	11	40	20222	15	10	26163
4	45	8281	8	15	14349	11	45	20364	15	15	26303
4	50	8426	8	20	14493	11	50	20507	15	20	26443
4	55	8571	8	25	14637	11	55	20649	15	25	26584
5		8716	8	30	14781	12		20791	15	30	26724
5	5	8860	8	35	14925	12	5	20933	15	35	26864
5	10	9005	8	40	15069	12	10	21076	15	40	27004
5	15	9150	8	45	15212	12	15	21218	15	45	27144
5	20	9295	8	50	15356	12	20	21360	15	50	27284
5	25	9440	8	55	15500	12	25	21502	15	55	27424
5	30	9585	9		15643	12	30	21644	16		27564
5	35	9729	9	5	15787	12	35	21786	16	5	27704
5	40	9874	9	10	15931	12	40	21928	16	10	27843
5	45	10019	9	15	16074	12	45	22070	16	15	27983
5	50	10164	9	20	16218	12	50	22212	16	20	28123
5	55	10308	9	25	16361	12	55	22353	16	25	28262
6		10453	9	30	16505	13		22495	16	30	28402
6	5	10597	9	35	16648	13	5	22637	16	35	28541
6	10	10742	9	40	16792	13	10	22778	16	40	28680
6	15	10887	9	45	16935	13	15	22920	16	45	28820
6	20	11031	9	50	17078	13	20	23062	16	50	28959
6	25	11176	9	55	17222	13	25	23203	16	55	29098
6	30	11320	10		17365	13	30	23345	17		29237
6	35	11465	10	5	17508	13	35	23486	17	5	29376
6	40	11609	10	10	17651	13	40	23627	17	10	29515
6	45	11754	10	15	17794	13	45	23769	17	15	29654
6	50	11898	10	20	17937	13	50	23910	17	20	29793
6	55	12043	10	25	18081	13	55	24051	17	25	29932
7		12187	10	30	18224	14		24192	17	30	30071
7	5	12331	10	35	18367	14	5	24333	17	35	30209
7	10	12476	10	40	18509	14	10	24474	17	40	30348
7	15	12620	10	45	18652	14	15	24615	17	45	30486
7	20	12764	10	50	18795	14	20	24756	17	50	30625
7	25	12908	10	55	18938	14	25	24897	17	55	30763

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
18	30902	21 30	36650	25	42262	28 30	47716
18 5	31040	21 35	36785	25 5	42394	28 35	47844
18 10	31178	21 40	36921	25 10	42525	28 40	47971
18 15	31316	21 45	37056	25 15	42657	28 45	48099
18 20	31454	21 50	37191	25 20	42788	28 50	48226
18 25	31592	21 55	37326	25 25	42920	28 55	48354
18 30	31730	22	37461	25 30	43051	29	48481
18 35	31868	22 5	37595	25 35	43182	29 5	48608
18 40	32006	22 10	37730	25 40	43313	29 10	48735
18 45	32144	22 15	37865	25 45	43444	29 15	48862
18 50	32282	22 20	37999	25 50	43575	29 20	48989
18 55	32419	22 25	38134	25 55	43706	29 25	49116
19	32557	22 30	38268	26	43837	29 30	49242
19 5	32694	22 35	38403	26 5	43968	29 35	49369
19 10	32832	22 40	38537	26 10	44098	29 40	49495
19 15	32969	22 45	38671	26 15	44229	29 45	49622
19 20	33106	22 50	38805	26 20	44459	29 50	49748
19 25	33244	22 55	38939	26 25	44490	29 55	49874
19 30	33381	23	39073	26 30	44620	30	50000
19 35	33518	23 5	39207	26 35	44750	30 5	50126
19 40	33655	23 10	39341	26 40	44880	30 10	50252
19 45	33792	23 15	39474	26 45	45010	30 15	50377
19 50	33929	23 20	39608	26 50	45140	30 20	50503
19 55	34065	23 25	39741	26 55	45269	30 25	50628
20	34202	23 30	39875	27	45399	30 30	50754
20 5	34339	23 35	40008	27 5	45528	30 35	50879
20 10	34475	23 40	40142	27 10	45658	30 40	51004
20 15	34612	23 45	40275	27 15	45787	30 45	51129
20 20	34748	23 50	40408	27 20	45917	30 50	51254
20 25	34884	23 55	40541	27 25	46046	30 55	51379
20 30	35021	24	40674	27 30	46175	31	51504
20 35	35157	24 5	40806	27 35	46304	31 5	51628
20 40	35293	24 10	40939	27 40	46433	31 10	51753
20 45	35429	24 15	41072	27 45	46561	31 15	51877
20 50	35565	24 20	41204	27 50	46690	31 20	52002
20 55	35701	24 25	41337	27 55	46819	31 25	52126
21	35837	24 30	41469	28	46947	31 30	52250
21 5	35973	24 35	41602	28 5	47076	31 35	52374
21 10	36108	24 40	41734	28 10	47004	31 40	52498
21 15	36244	24 45	41866	28 15	47332	31 45	52621
21 20	36379	24 50	41998	28 20	47460	31 50	52745
21 25	36515	24 55	42130	28 25	47588	31 55	52869

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
32	52992	35 30	58070	39	62932	42 30	67559
32 5	53115	35 35	58189	39 5	63045	42 35	67666
32 10	53238	35 40	58307	39 10	63158	42 40	67773
32 15	53361	35 45	58425	39 15	63271	42 45	67880
32 20	53484	35 50	58543	39 20	63383	42 50	67987
32 25	53607	35 55	58661	39 25	63496	42 55	68093
32 30	53730	36	58779	39 30	63608	43	68200
32 35	53853	36 5	58896	39 35	63720	43 5	68306
32 40	53975	36 10	59014	39 40	63832	43 10	68412
32 45	54097	36 15	59131	39 45	63944	43 15	68518
32 50	54220	36 20	59248	39 50	64056	43 20	68624
32 55	54342	36 25	59365	39 55	64167	43 25	68730
33	54464	36 30	59482	40	64279	43 30	68835
33 5	54586	36 35	59599	40 5	64390	43 35	68941
33 10	54708	36 40	59716	40 10	64501	43 40	69046
33 15	54829	36 45	59832	40 15	64612	43 45	69151
33 20	54951	36 50	59949	40 20	64723	43 50	69256
33 25	55072	36 55	60065	40 25	64834	43 55	69361
33 30	55194	37	60182	40 30	64945	44	69466
33 35	55315	37 5	60298	40 35	65055	44 5	69570
33 40	55436	37 10	60414	40 40	65166	44 10	69675
33 45	55557	37 15	60529	40 45	65276	44 15	69779
33 50	55678	37 20	60645	40 50	65386	44 20	69883
33 55	55799	37 25	60761	40 55	65496	44 25	69987
34	55919	37 30	60876	41	65606	44 30	70091
34 5	56040	37 35	60991	41 5	65716	44 35	70195
34 10	56160	37 40	61107	41 10	65825	44 40	70298
34 15	56281	37 45	61222	41 15	65935	44 45	70401
34 20	56401	37 50	61337	41 20	66044	44 50	70505
34 25	56521	37 55	61451	41 25	66153	44 55	70608
34 30	56641	38	61566	41 30	66262	45	70711
34 35	56760	38 5	61681	41 35	66371	45 5	70813
34 40	56880	38 10	61795	41 40	66480	45 10	70916
34 45	57000	38 15	61909	41 45	66588	45 15	71019
34 50	57119	38 20	62024	41 50	66697	45 20	71121
34 55	57238	38 25	62138	41 55	66805	45 25	71223
35	57357	38 30	62252	42	66913	45 30	71325
35 5	57477	38 35	62365	42 5	67021	45 35	71427
35 10	57596	38 40	62479	42 10	67129	45 40	71529
35 15	57715	38 45	62592	42 15	67237	45 45	71630
35 20	57833	38 50	62706	42 20	67344	45 50	71732
35 25	57952	38 55	62819	42 25	67452	45 55	71833

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
46	71934	49 30	76041	53	79864	56 30	83389
46 5	72035	49 35	76135	53 5	79951	56 35	83467
46 10	72136	49 40	76229	53 10	80038	56 40	83549
46 15	72236	49 45	76323	53 15	80125	56 45	83629
46 20	72337	49 50	76417	53 20	80212	56 50	83708
46 25	72437	49 55	76511	53 25	80299	56 55	83788
46 30	72537	50	76604	53 30	80386	57	83867
46 35	72637	50 5	76698	53 35	80472	57 5	83946
46 40	72737	50 10	76791	53 40	80558	57 10	84025
46 45	72837	50 15	76884	53 45	80644	57 15	84104
46 50	72937	50 20	76977	53 50	80730	57 20	84183
46 55	73036	50 25	77070	53 55	80816	57 25	84261
47	73135	50 30	77162	54	80902	57 30	84339
47 5	73234	50 35	77255	54 5	80987	57 35	84417
47 10	73333	50 40	77347	54 10	81072	57 40	84495
47 15	73432	50 45	77439	54 15	81157	57 45	84573
47 20	73531	50 50	77531	54 20	81242	57 50	84650
47 25	73629	50 55	77623	54 25	81327	57 55	84728
47 30	73728	51	77715	54 30	81412	58	84805
47 35	73826	51 5	77806	54 35	81496	58 5	84882
47 40	73924	51 10	77897	54 40	81580	58 10	84959
47 45	74022	51 15	77988	54 45	81664	58 15	85035
47 50	74120	51 20	78079	54 50	81748	58 20	85112
47 55	74217	51 25	78170	54 55	81832	58 25	85188
48	74314	51 30	78261	55	81915	58 30	85264
48 5	74412	51 35	78351	55 5	81999	58 35	85340
48 10	74509	51 40	78442	55 10	82082	58 40	85416
48 15	74606	51 45	78532	55 15	82165	58 45	85491
48 20	74703	51 50	78622	55 20	82248	58 50	85567
48 25	74799	51 55	78711	55 25	82330	58 55	85642
48 30	74896	52	78801	55 30	82413	59	85717
48 35	74992	52 5	78891	55 35	82495	59 5	85792
48 40	75088	52 10	78980	55 40	82577	59 10	85866
48 45	75184	52 15	79069	55 45	82659	59 15	85941
48 50	75280	52 20	79158	55 50	82741	59 20	86015
48 55	75375	52 25	79247	55 55	82822	59 25	86089
49	75471	52 30	79335	56	82904	59 30	86163
49 5	75566	52 35	79424	56 5	82985	59 35	86237
49 10	75661	52 40	79512	56 10	83066	59 40	86310
49 15	75756	52 45	79600	56 15	83147	59 45	86384
49 20	75851	52 50	79688	56 20	83228	59 50	86457
49 25	75946	52 55	79776	56 25	83308	59 55	86530

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
60	86603	63 30	89493	67	92050	70 30	94264
60 5	86675	63 35	89558	67 5	92107	70 35	94313
60 10	86748	63 40	89623	67 10	92164	70 40	94361
60 15	86820	63 45	89687	67 15	92220	70 45	94409
60 20	86892	63 50	89752	67 20	92276	70 50	94457
60 25	86964	63 55	89816	67 25	92332	70 55	94504
60 30	87036	64	89879	67 30	92388	71	94552
60 35	87107	64 5	89943	67 35	92444	71 5	94599
60 40	87178	64 10	90007	67 40	92499	71 10	94646
60 45	87250	64 15	90070	67 45	92554	71 15	94693
60 50	87321	64 20	90133	67 50	92609	71 20	94738
60 55	87391	64 25	90196	67 55	92664	71 25	94786
61	87462	64 30	90259	68	92718	71 30	94832
61 5	87532	64 35	90321	68 5	92773	71 35	94878
61 10	87603	64 40	90383	68 10	92827	71 40	94924
61 15	87673	64 45	90446	68 15	92881	71 45	94970
61 20	87743	64 50	90507	68 20	92935	71 50	95015
61 25	87812	64 55	90569	68 25	92988	71 55	95061
61 30	87882	65	90631	68 30	93042	72	95106
61 35	87951	65 5	90692	68 35	93095	72 5	95151
61 40	88020	65 10	90753	68 40	93148	72 10	95195
61 45	88089	65 15	90814	68 45	93201	72 15	95240
61 50	88158	65 20	90875	68 50	93253	72 20	95284
61 55	88226	65 25	90936	68 55	93306	72 25	95328
62	88295	65 30	90996	69	93358	72 30	95372
62 5	88363	65 35	91056	69 5	93410	72 35	95415
62 10	88431	65 40	91116	69 10	93462	72 40	95459
62 15	88499	65 45	91176	69 15	93514	72 45	95502
62 20	88566	65 50	91236	69 20	93565	72 50	95545
62 25	88634	65 55	91295	69 25	93616	72 55	95588
62 30	88701	66	91355	69 30	93667	73	95630
62 35	88768	66 5	91414	69 35	93718	73 5	95673
62 40	88835	66 10	91472	69 40	93769	73 10	95715
62 45	88902	66 15	91531	69 45	93819	73 15	95757
62 50	88968	66 20	91590	69 50	93869	73 20	95799
62 55	89035	66 25	91648	69 55	93919	73 25	95841
63	89101	66 30	91706	70	93969	73 30	95882
63 5	89167	66 35	91764	70 5	94019	73 35	95923
63 10	89232	66 40	91822	70 10	94068	73 40	95964
63 15	89298	66 45	91879	70 15	94118	73 45	96005
63 20	89363	66 50	91936	70 20	94167	73 50	96046
63 25	89428	66 55	91994	70 25	94216	73 55	96086

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
74	96126	77 30	97630	81	98769	84 30	99540
74 5	96166	77 35	97661	81 5	98791	84 35	99553
74 10	96206	77 40	97692	81 10	98814	84 40	99567
74 15	96246	77 45	97723	81 15	98836	84 45	99580
74 20	96285	77 50	97754	81 20	98858	84 50	99594
74 25	96324	77 55	97784	81 25	98880	84 55	99607
74 30	96363	78	97815	81 30	98902	85	99619
74 35	96402	78 5	97845	81 35	98923	85 5	99632
74 40	96441	78 10	97875	81 40	98944	85 10	99644
74 45	96479	78 15	97905	81 45	98965	85 15	99657
74 50	96517	78 20	97934	81 50	98986	85 20	99669
74 55	96555	78 25	97963	81 55	99006	85 25	99680
75	96593	78 30	97992	82	99027	85 30	99692
75 5	96630	78 35	98021	82 5	99047	85 35	99703
75 10	96667	78 40	98050	82 10	99067	85 40	99714
75 15	96705	78 45	98079	82 15	99087	85 45	99725
75 20	96742	78 50	98107	82 20	99106	85 50	99736
75 25	96778	78 55	98135	82 25	99125	85 55	99746
75 30	96815	79	98163	82 30	99144	86	99756
75 35	96851	79 5	98190	82 35	99163	86 5	99766
75 40	96887	79 10	98218	82 40	99182	86 10	99776
75 45	96923	79 15	98245	82 45	99201	86 15	99786
75 50	96959	79 20	98272	82 50	99219	86 20	99795
75 55	96994	79 25	98299	82 55	99237	86 25	99804
76	97028	79 30	98325	83	99255	86 30	99813
76 5	97065	79 35	98352	83 5	99272	86 35	99822
76 10	97100	79 40	98378	83 10	99390	86 40	99831
76 15	97134	79 45	98404	83 15	99307	86 45	99839
76 20	97169	79 50	98430	83 20	99324	86 50	99847
76 25	97203	79 55	98455	83 25	99341	86 55	99855
76 30	97237	80	,98481	83 30	99357	87	99863
76 35	97271	80 5	98506	83 35	99374	87 5	99870
76 40	97304	80 10	98531	83 40	99390	87 10	99878
76 45	97338	80 15	98556	83 45	99406	87 15	99885
76 50	97371	80 20	98581	83 50	99421	87 20	99892
76 55	97404	80 25	98605	83 55	99437	87 25	99898
77	97437	80 30	98629	84	99452	87 30	99905
77 5	97470	80 35	98652	84 5	99467	87 35	99911
77 10	97502	80 40	98676	84 10	99482	87 40	99917
77 15	97534	80 45	98700	84 15	99497	87 45	99923
77 20	97566	80 50	98723	84 20	99511	87 50	99929
77 25	97598	80 55	98746	84 25	99526	87 55	99934

G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.	G. M.	SINUS.
88	99939	88 30	99966	89	99985	89 30	99996
88 5	99944	88 35	99969	89 5	99987	89 35	99997
88 10	99949	88 40	99973	89 10	99989	89 40	99998
88 15	99953	88 45	99976	89 15	99991	89 45	,99999
88 20	99958	88 50	99979	89 20	99993	89 50	,99999$\frac{1}{2}$
88 25	99962	88 55	99982	89 25	99995	89 55	,99999$\frac{4}{5}$
				Sinus totus seu 90 grad.			100000

UT nonnullorum votis fiat satis, lubet prætermissam in hoc compendio methodum extrahendi radicem cubicam è quocumque numero dato paucis hîc exponere. Ut autem faciliùs hæc operatio peragatur, cognosci debent omnes numeri cubici quorum radices unico exprimuntur charactere, hos exhibet sequens Schema:

Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ex hoc schemate apparet radicem cujusvis numeri tribus tantum caracteribus expressi, unico constare caractere; 10 enim est radix cubica primi numeri quatuor notas complectentis, seu 1000. Hinc ut inveniatur numeri cujusvis radix cubica, numerus propositus in triades distribuitur progrediendo à dextrâ versus sinistram, quemadmodum in dualitates dividitur, in radicis quadratæ extractione, totque futuri sunt in radice caracteres, quot erunt triadum sectiones. His positis fit.

PROBLEMA.

Ex numero dato, v. g. ex 13312053, radicem cubicam extrahere?

Ipso per triades distributo, quæro 1° radicem cubicam primæ sectionis versus lævam, seu numeri 13: animadverto 2 esse radicem numeri cubici proximè inferioris, seu 8; quapropter scribo 2 ad dextram, per modum quoti, deindè hujus radicis cubum 8 subtraho ex primâ sectione 13, fit residuum 5, apud quod demitto secundam sectionem 312, duobus tamen ultimis caracteribus à 1° per punctum separatis, quâ separatione indicatur duos postremos caracteres non pertinere ad numerum mox dividendum.

13, 312, 053
8
53.- 12
13312
12167
11450-53
13312053

237
12
1587

2°. Pro divisore assumo triplum radicis mox inventæ quadratum, sc. 12, & per ipsum divido primæ sectionis residuum 1° caractere sectionis secundæ auctum, nempè 53; quotus ex hac divisione ortus est 4, qui radici jam inventæ 2 adjungendus est, quo facto radix =24: quoniam autem hujus radicis cubus major est duabus sectionibus circa quas operati sumus, ideò radix illa æquò major est; quare ex posteriori numero 4 unitas est auferenda, eritque radix =23.

3°. Radicem 23 ad cubum elevo, proditque numerus 12167, quem subtraho ex duabus primis sectionibus, commoditatis gratiâ, infrà numerum 53 demissis; fitque residuum 1145, juxta quod demitto ultimam sectionem 053, duobus postremis caracteribus per punctum secretis.

4°. In divisorem iterum assumo radicis inventæ 23 triplum quadratum =1587. Tum numero 11450 per 1587 diviso, quotum 7 inventæ radici adjungo; fitque radix =237, quæ in cubum aucta =13312053, hæc autem summa ex tribus sectionibus simul unitis subtrahenda est: quoniam porro subtractione peractâ nihil superest, concludendum 237 esse veram numeri propositi radicem cubicam.

Præsentis operationis probatio fit elevatione radicis ad cubum & additione residui, si quod fuerit; si enim summa numero proposito æqualis inveniatur, legitima est operatio; si secus, illegitima.

Ne autem numerus ingens nonnunquam superstes, post radicis sive cubicæ sive quadratæ extractionem, dubium de valore operationis ingerat; sedulò notate sequentia duo theoremata: *Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, æqualis est summæ radicum. Differentia cuborum verò æqualis est aggregato ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris, & radice minore.*

Vivâ voce exponemus quomodo sequentes formulæ algebraïcæ, $a^2+2ab+b^2$; & $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, quarum prima quadratum, secunda verò cubum radicis binomiæ $a+b$ exhibet, quadratorum quorumlibet & cuborum, quorum radices sunt complexæ, compositionem repræsentent, sintque exemplar operationum in eorum decompositione, seu radicum extractione, adhibendarum.

FINIS.

FIG: GEOM: TAB: 1°

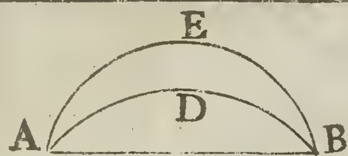


fig: 1a

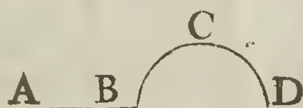


fig: 2a



fig: 3a

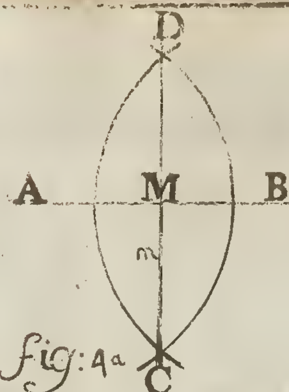


fig: 4a



fig: 5a

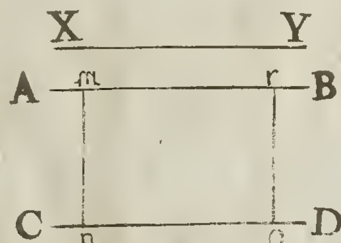


fig: 6a

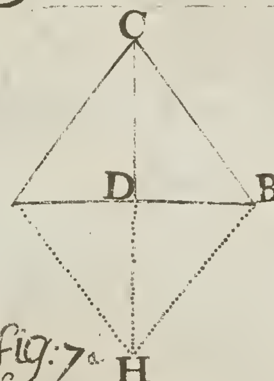


fig: 7a

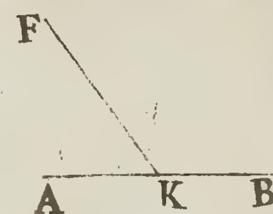


fig: 8a

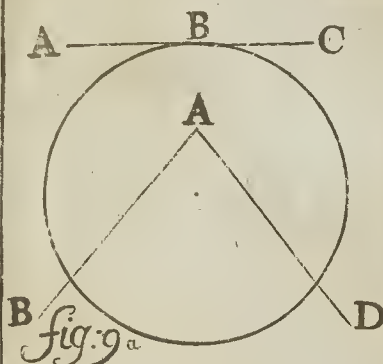


fig: 9a

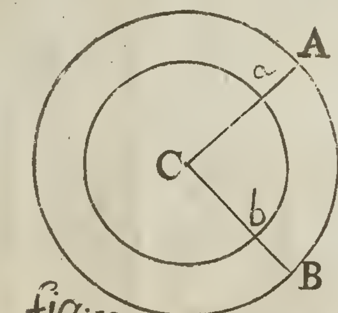


fig: 10a

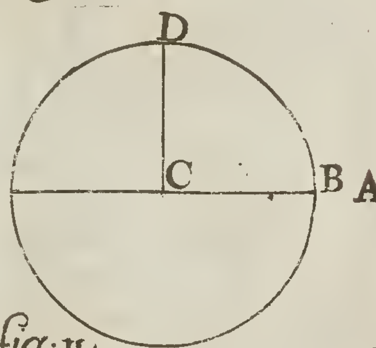


fig: 11a

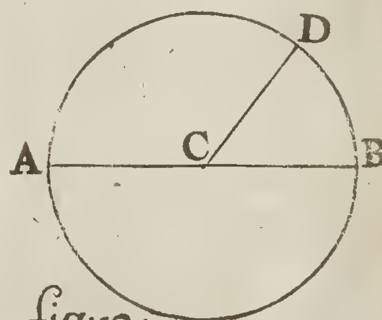


fig: 12a

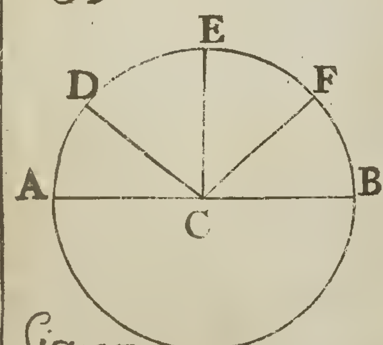


fig: 13a

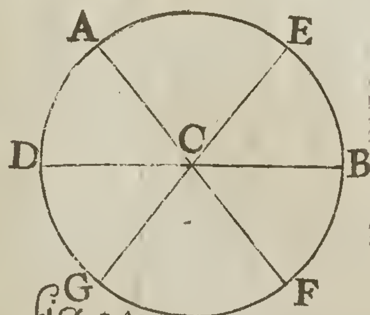


fig: 14a

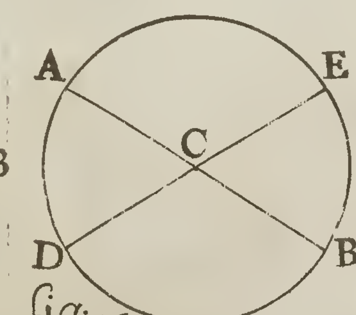


fig: 15a

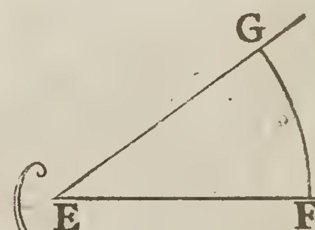


fig: 16a

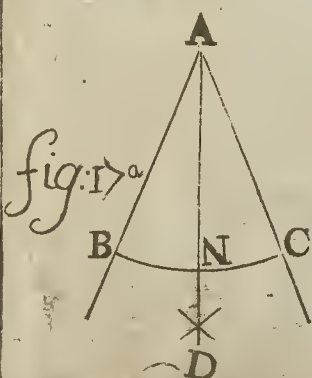


fig: 17a

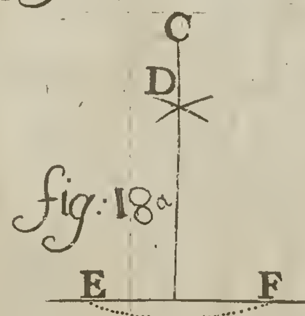


fig: 18a

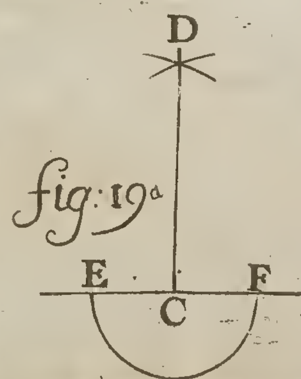
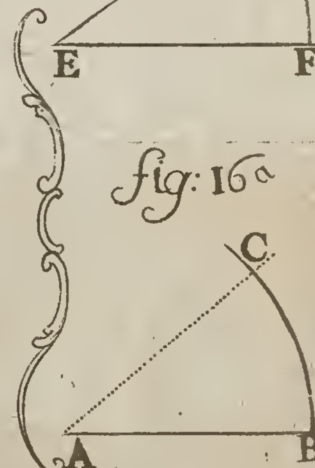


fig: 19a



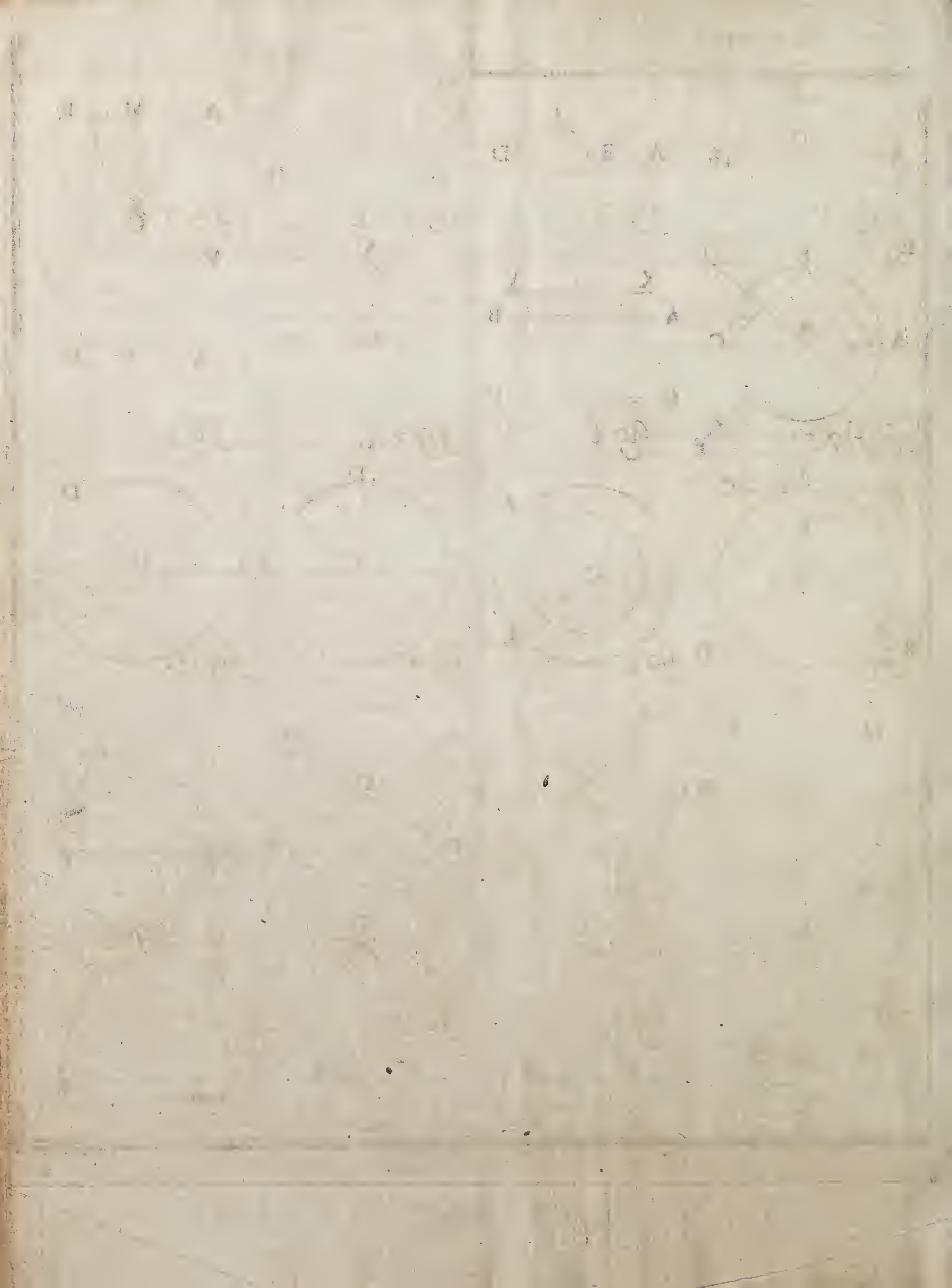
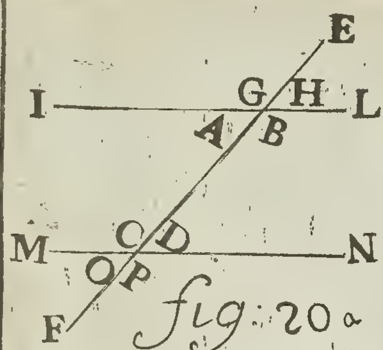
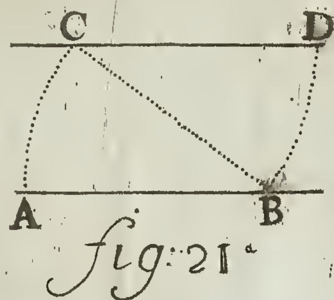
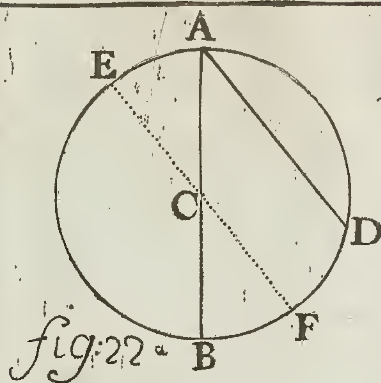
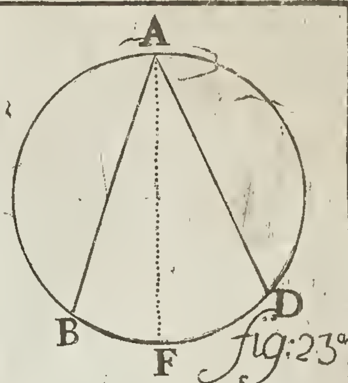


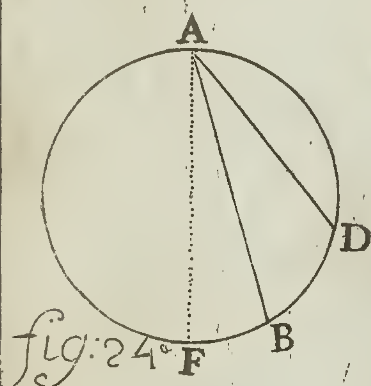
Fig: Geom : Tab: II.a

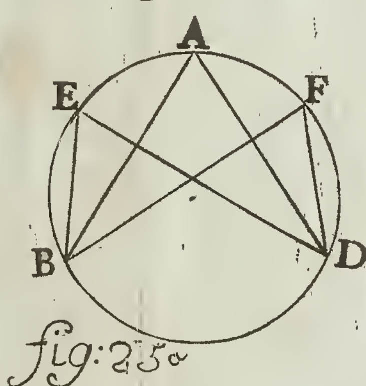


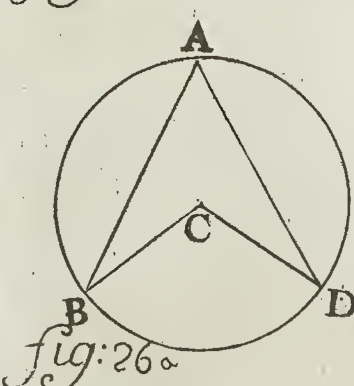


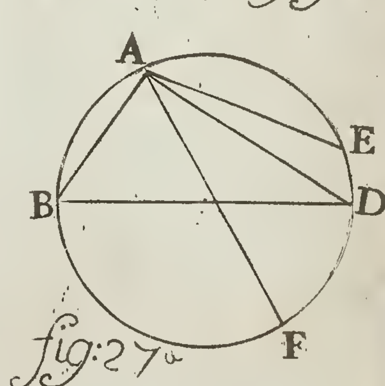


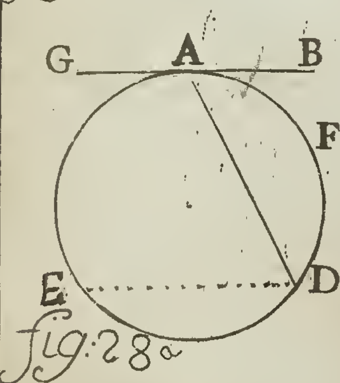


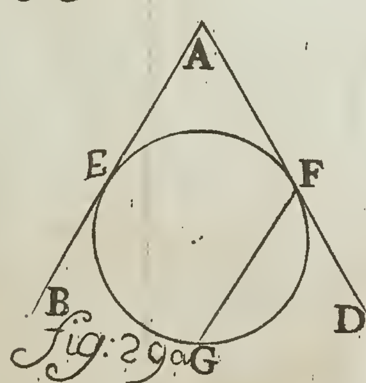


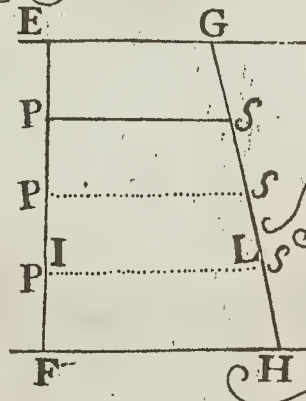


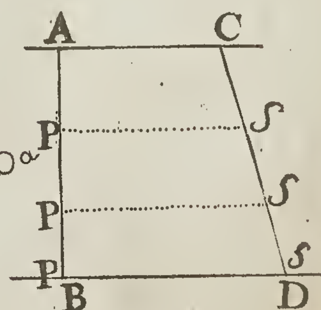


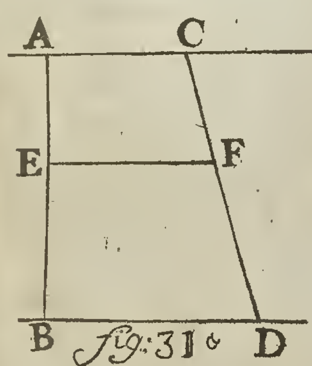


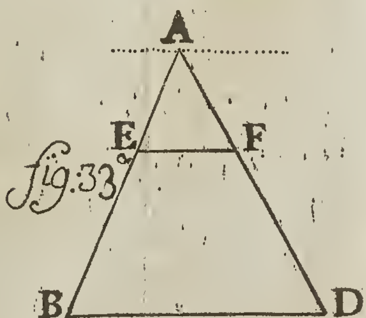


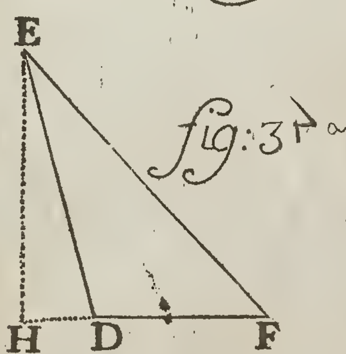


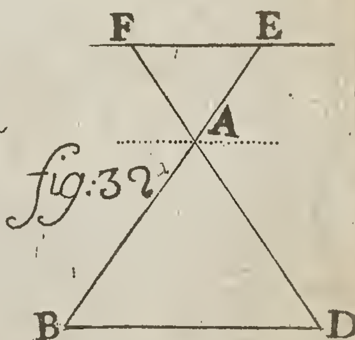


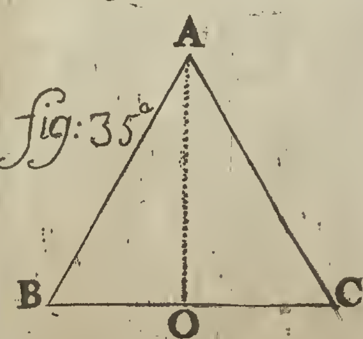




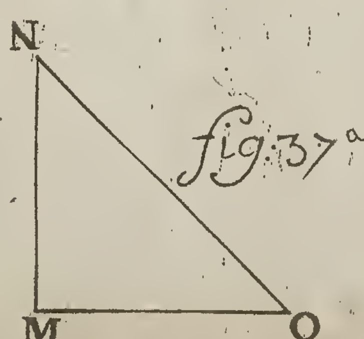












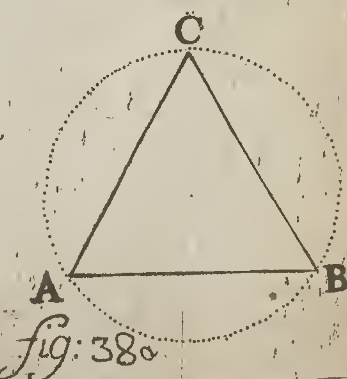
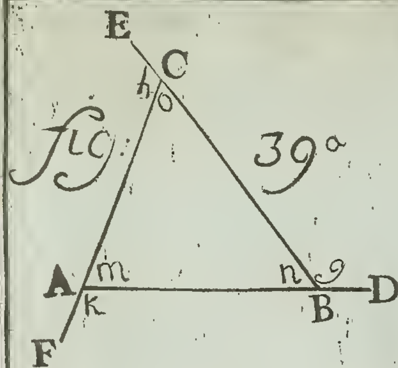
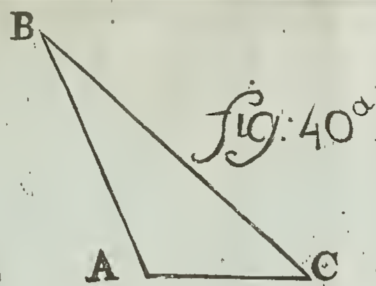
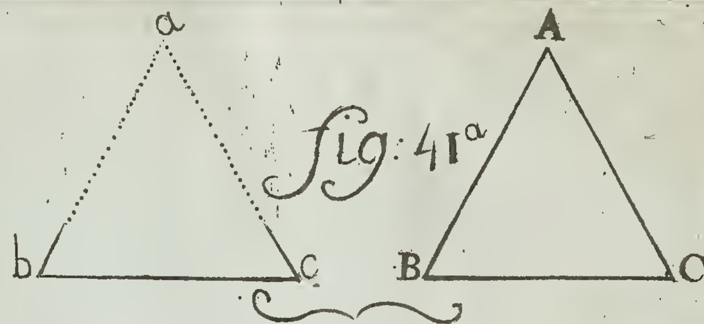
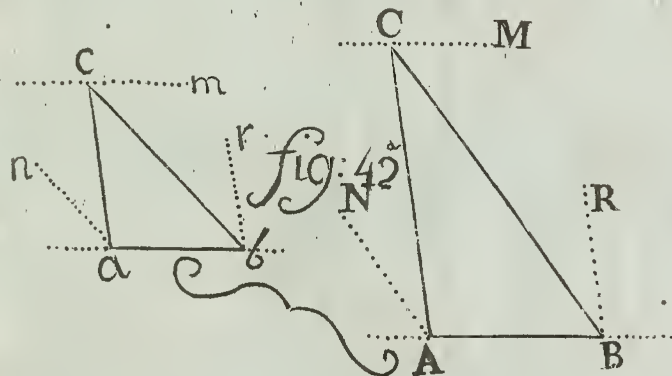


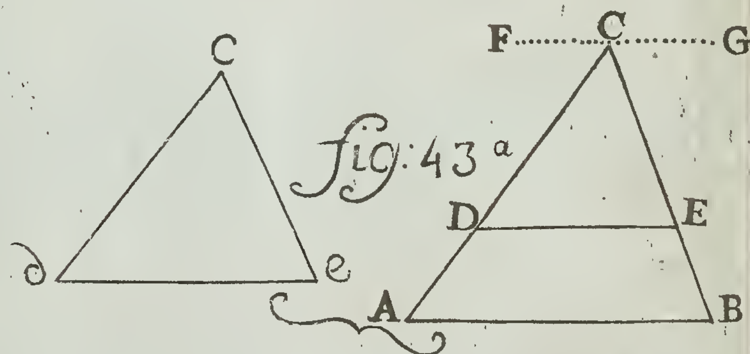
Fig: Geom: Tab: III^a

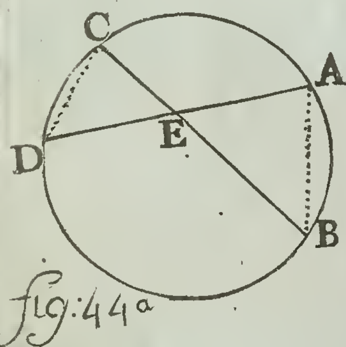


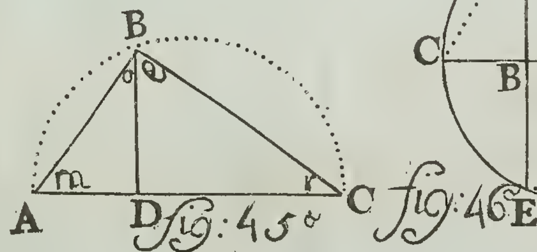


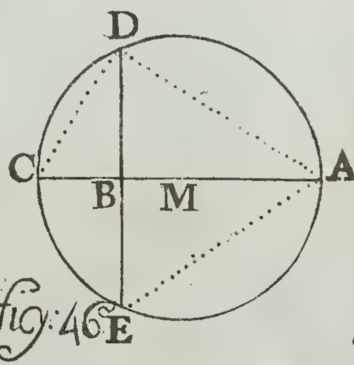


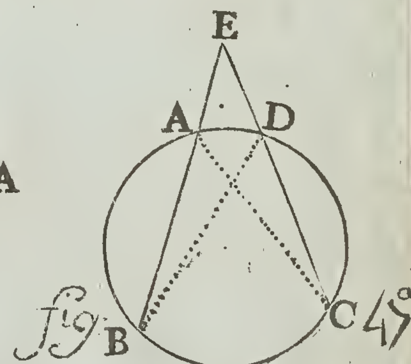


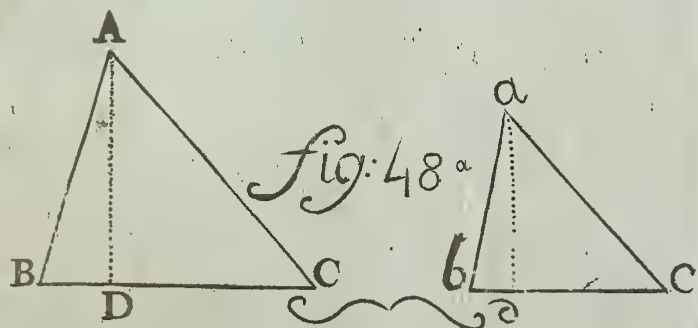


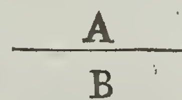


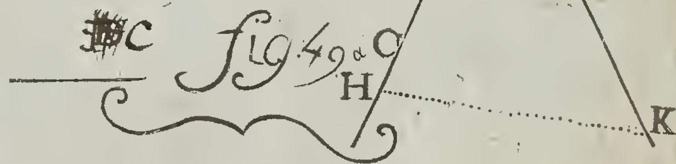


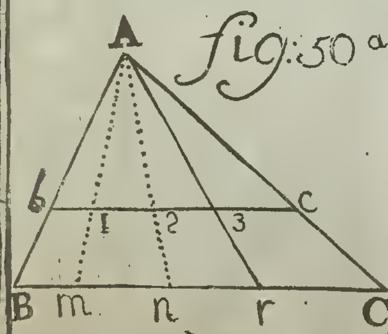


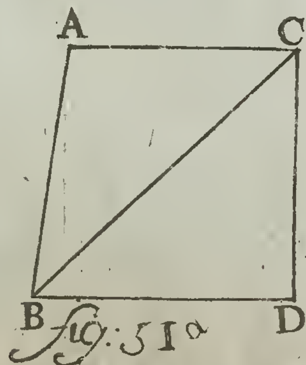


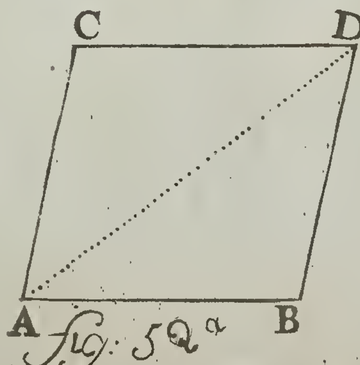


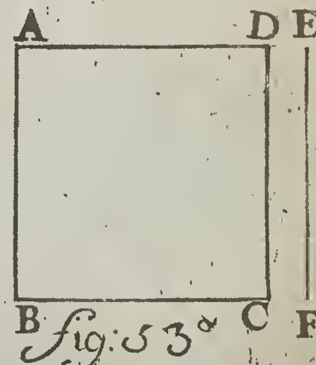


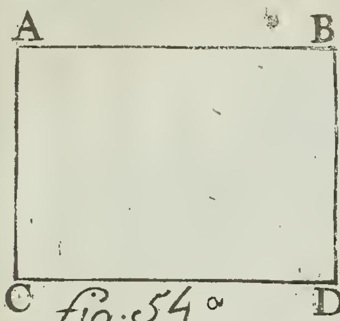


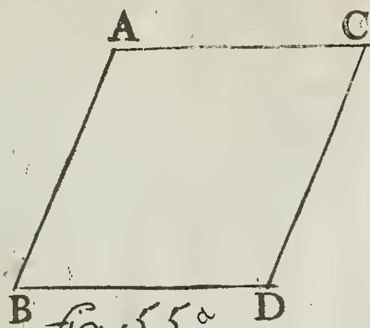


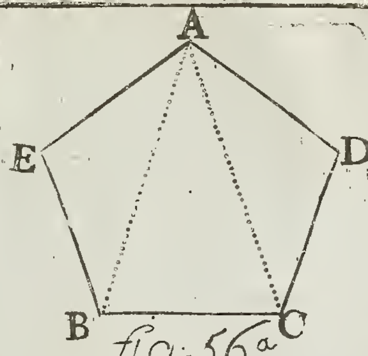


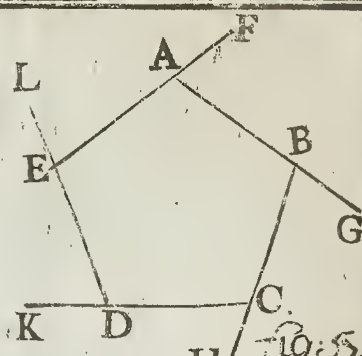


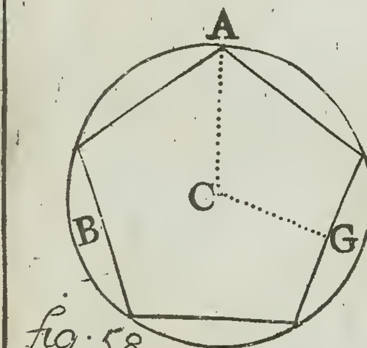


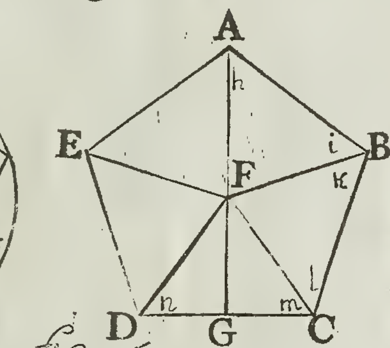

A
B
C
D
fig: 54ª

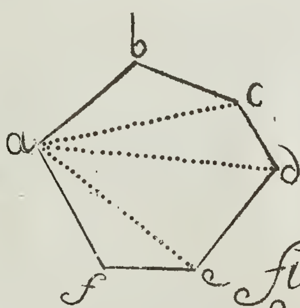

A
C
B
D
fig: 55ª

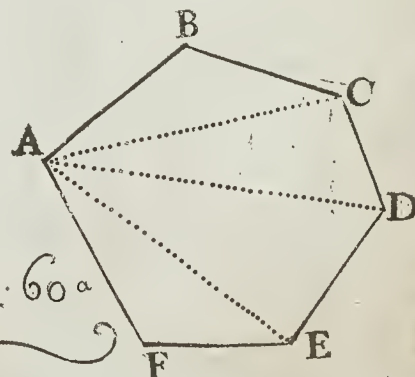

A
E
D
B
C
fig: 56ª

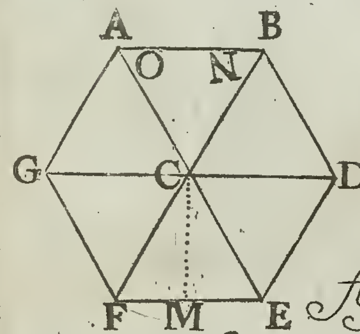

F
A
L
E
B
G
K
D
C
H
fig: 57ª

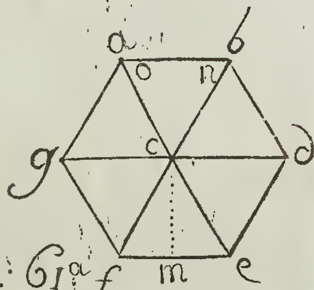

A
C
B
G
fig: 58

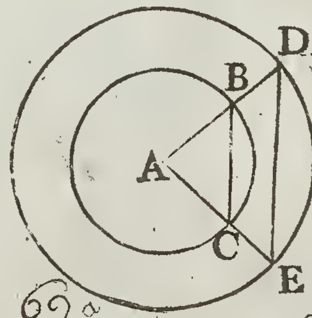

A
h
E
i
B
F
k
l
D
n
m
G
C
fig: 59ª

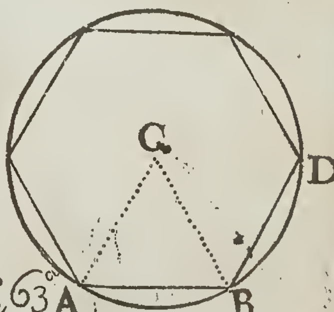

b
c
a
d
f
e

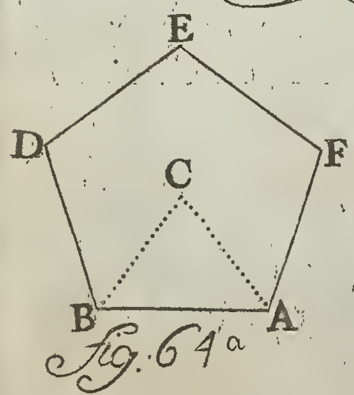

fig: 60ª
B
C
A
D
F
E

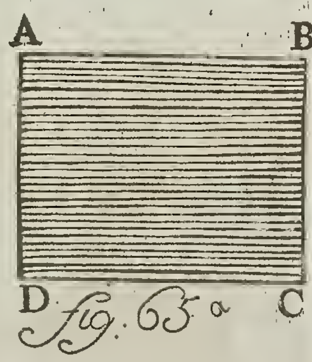

A
B
O
N
G
C
D
F
M
E

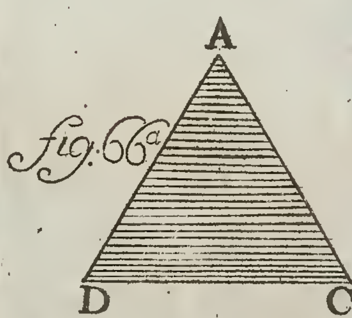

a
b
o
n
g
c
d
fig: 61ª
f
m
e

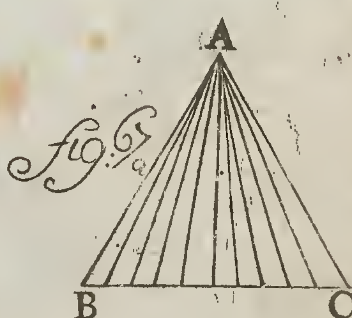

D
B
A
C
E
fig 62ª

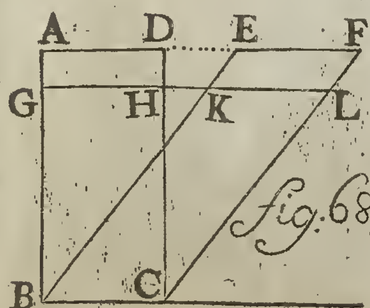

C
D
fig 63ª
A
B

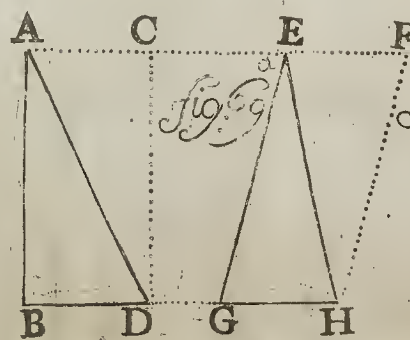

E
D
F
C
B
A
fig: 64ª

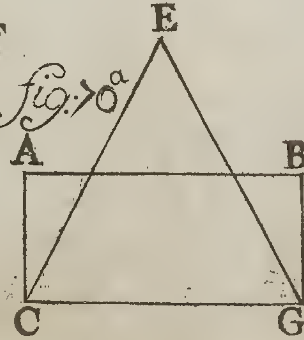

A
B
D
C
fig: 65ª

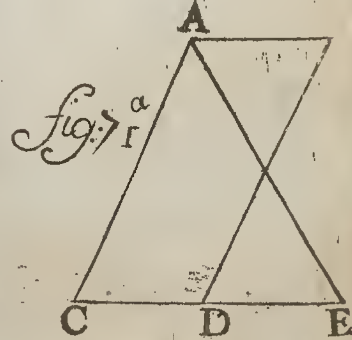

A
fig: 66ª
D
C


A
fig: 67ª
B
C


A
D
E
F
G
H
K
L
fig: 68ª
B
C


A
C
E
F
a
fig: 69
B
D
G
H


E
fig: 70ª
A
B
C
G


A
fig: 71ª
C
D
E

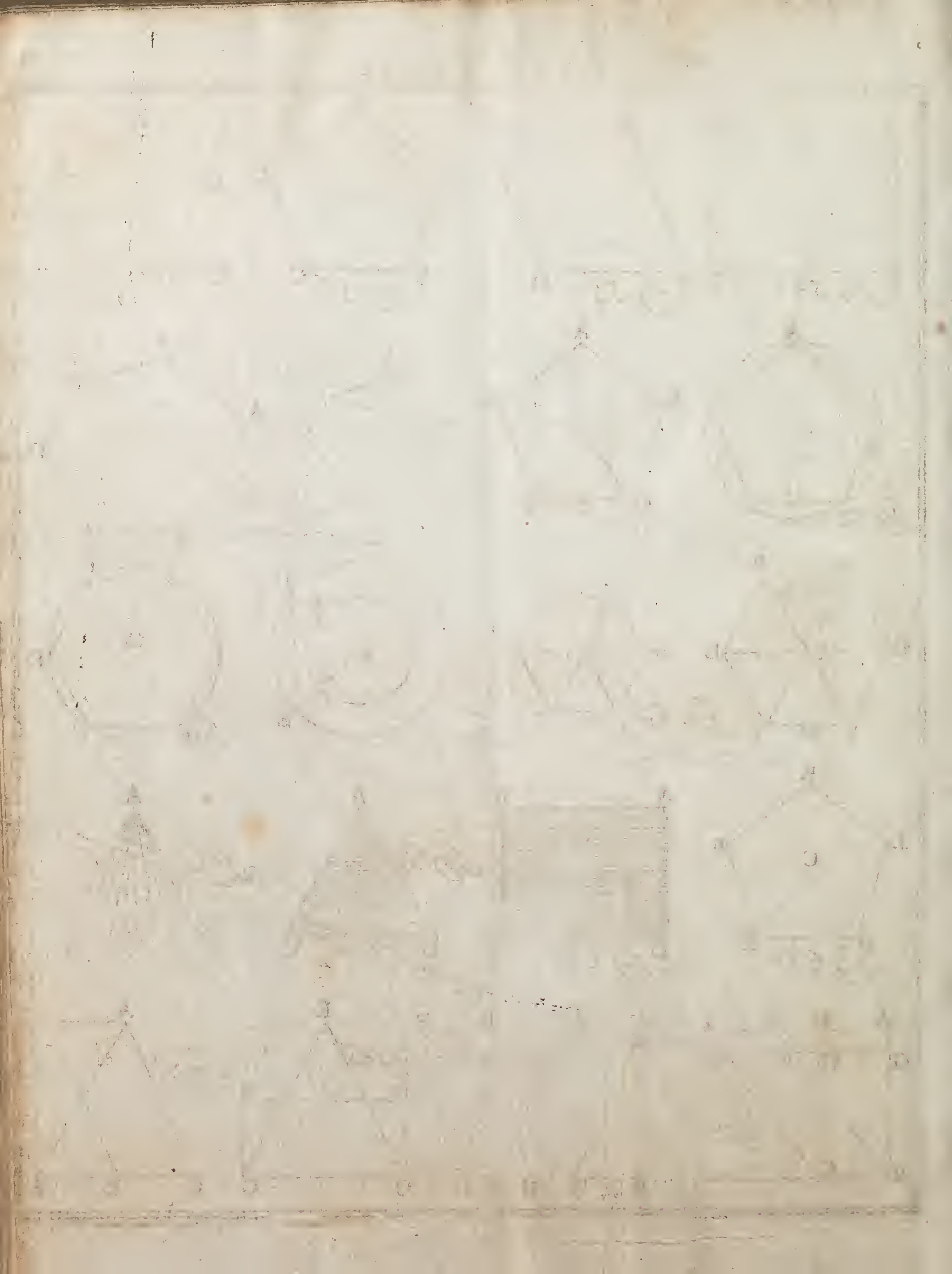
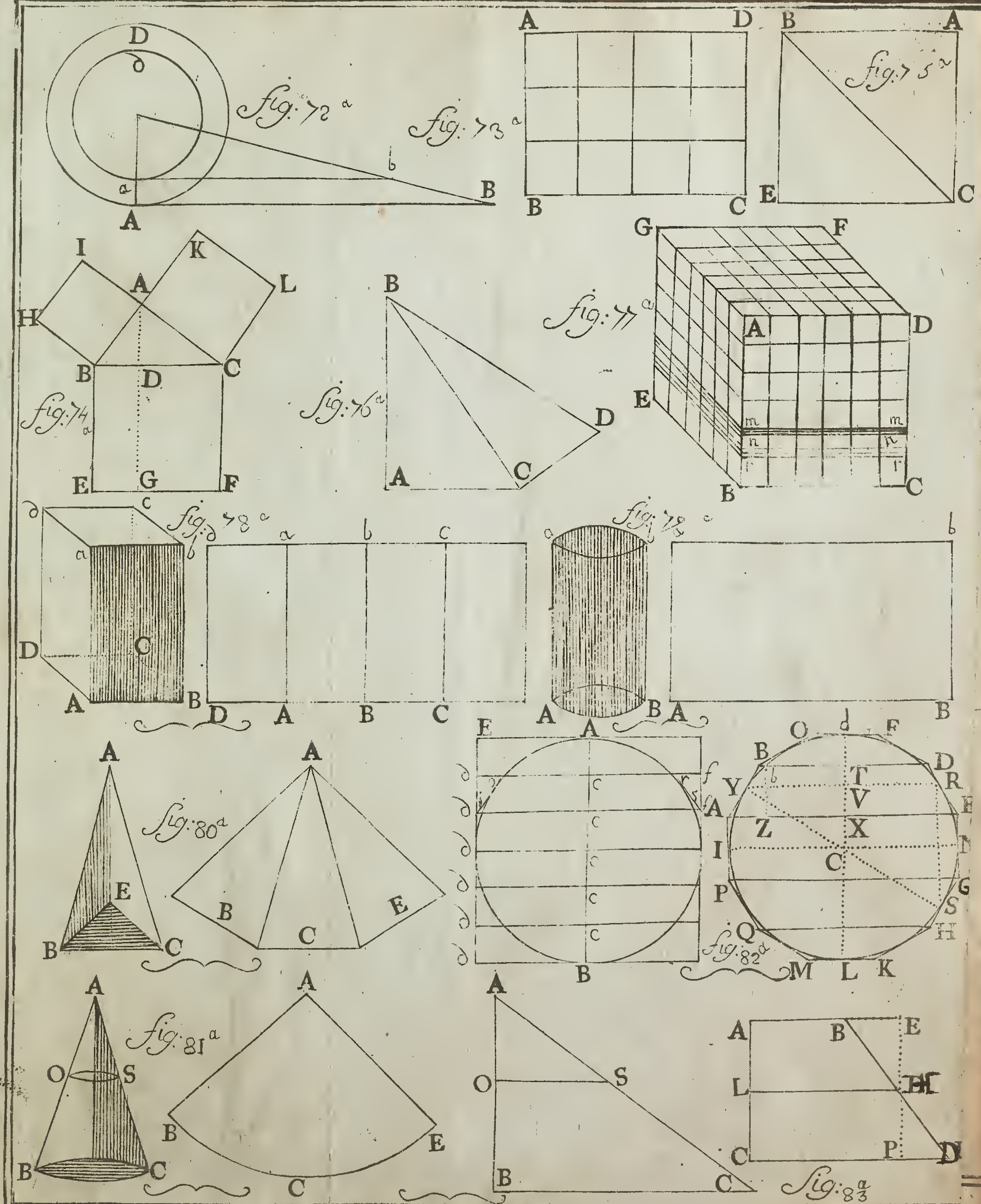
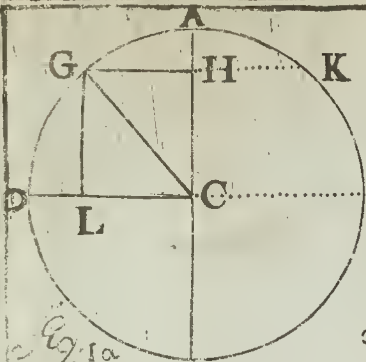
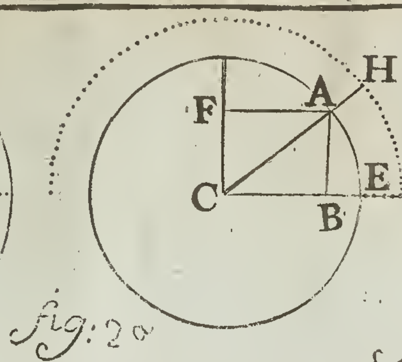
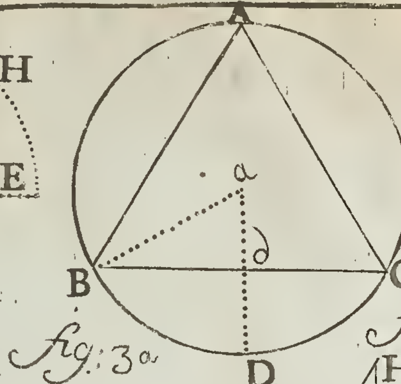


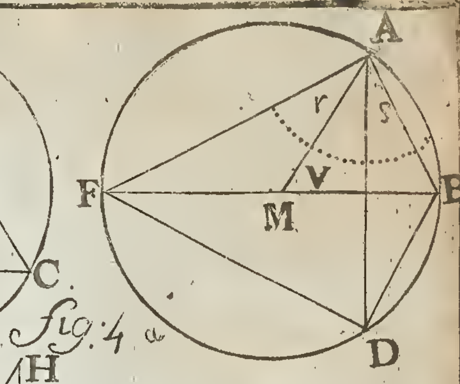
FIG: GEOM: TAB. Va

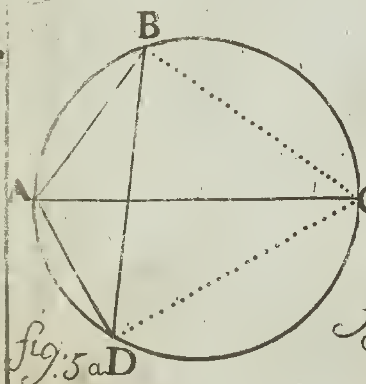


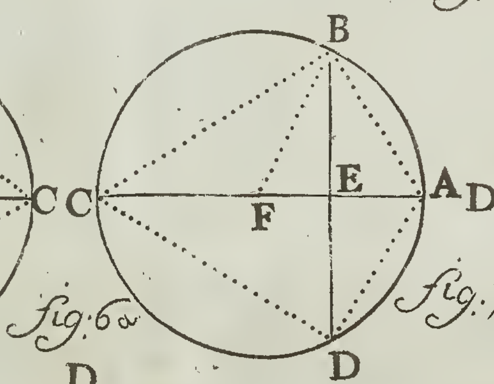


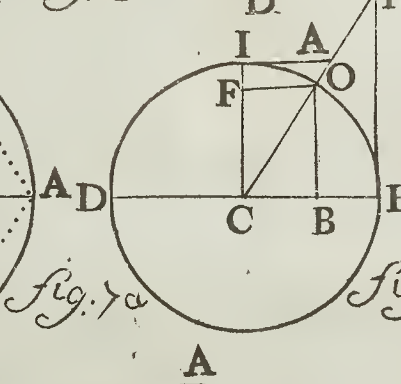


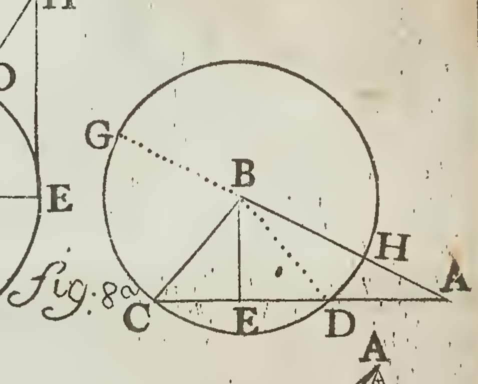


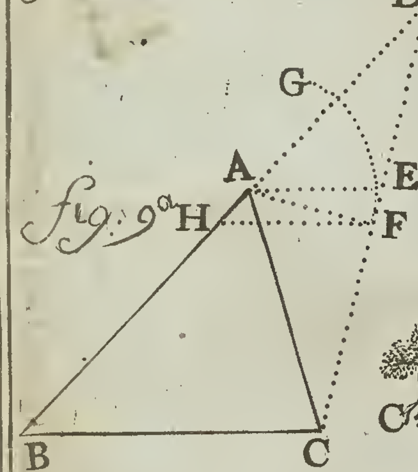


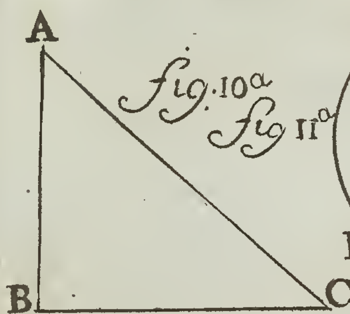


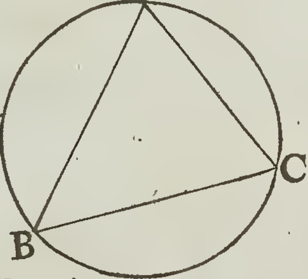


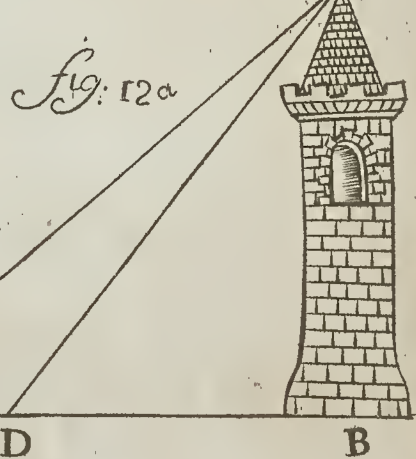


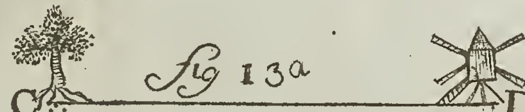


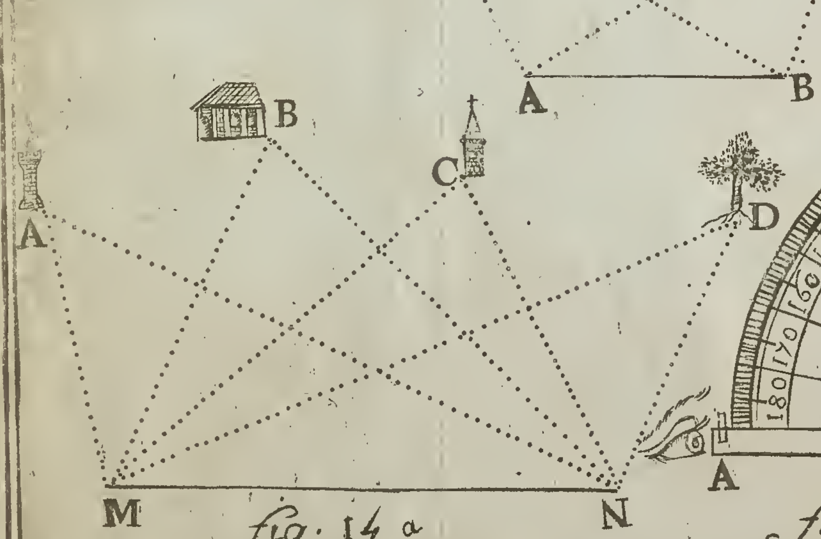


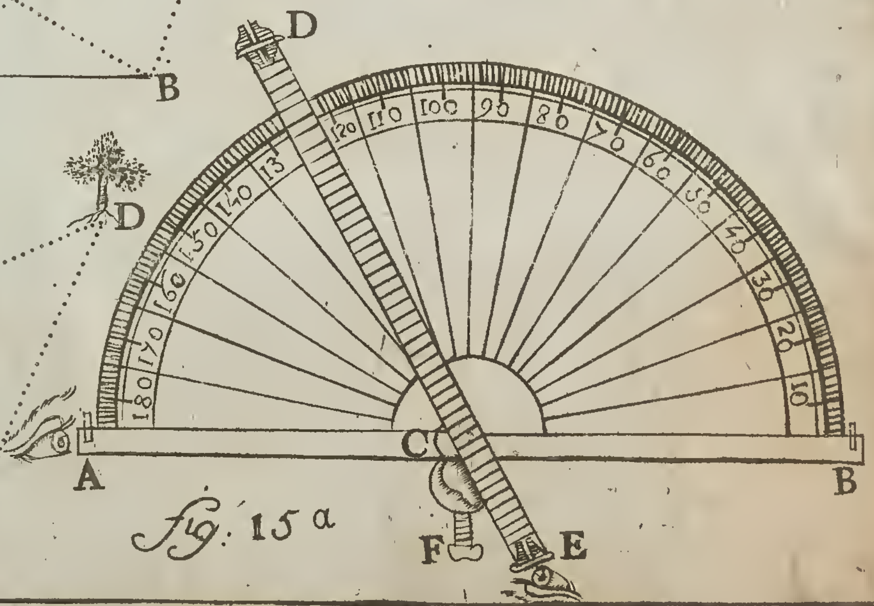












BIS SCVLPSIT



